

# 2021 Workshop of Tannakian Categories

Vietnam Institute of Mathematics

23rd August 2021



# Introduction

A neutral Tannakian category over a field  $k$  is a rigid  $k$ -linear abelian tensor category  $C$  whose unit  $1$  satisfies  $\text{End}(1) \cong k$ , and is moreover equipped with a fibre functor. The central result about Tannakian duality is that every Tannakian category is equivalent to the category of finite dimensional representations of group scheme over  $k$ , which is unique up to isomorphism. In this workshop, by starting from basic notions in category theory, we will study Tannakian duality. Besides, we will study the relationship between Tannakian theory, Hodge theory and Differential Galois theory.

**Keyword.** Neutral Tannakian category, Representations of group scheme over  $k$ ; Tannakian Duality, Galois category, Differential Galois theory, Nori's fundamental group, Hodge theory



# Contents

<b>Introduction</b>	<b>iii</b>
<b>Program of the Workshop</b>	<b>1</b>
<b>Workshop's Talks</b>	<b>3</b>
Tensor Categories ( <i>Nguyễn Trung Nghĩa, Ho Chi Minh</i> ) . . . . .	3
Abelian tensor categories ( <i>Phạm Khoa Bằng, Hanoi</i> ) . . . . .	3
Affine schemes and affine group schemes ( <i>Nguyễn Đăng Hợp, Hanoi</i> ) . . . . .	3
Representations and Comodules ( <i>Nguyễn Mạnh Linh, Paris</i> ) . . . . .	4
Neutral Tannakian categories ( <i>Phạm Thanh Tâm, Hanoi</i> ) . . . . .	4
Recovering affine group scheme from its representation ( <i>Nguyễn Đại Dương, Danang</i> ) . . . . .	4
Grothendieck-Deligne-Saavedra Theorem ( <i>Nguyễn Quang Khải, Hanoi</i> ) . . . . .	5
Examples of Tannakian categories ( <i>Phùng Hồ Hải, Hanoi</i> ) . . . . .	5
Galois category ( <i>Võ Quốc Bảo, Hanoi</i> ) . . . . .	5
Étale fundamental groups ( <i>Đặng Tuấn Thương, Düsseldorf</i> ) . . . . .	6
Differential Galois Theory I ( <i>Nghiêm Trần Trung, Paris</i> ) . . . . .	6
Differential Galois Theory II ( <i>Nguyễn Kiều Hiếu, Munich</i> ) . . . . .	6
Nori's fundamental group I ( <i>Đặng Quốc Huy, Hanoi</i> ) . . . . .	7
Nori's fundamental group II ( <i>Nguyễn Khánh Hưng, Hanoi</i> ) . . . . .	7
Mumford-Tate group I ( <i>Phạm Ngô Thành Đạt, Paris</i> ) . . . . .	7
Mumford-Tate group II ( <i>Nguyễn Mạnh Toàn, Osnabrück</i> ) . . . . .	8



# Program of the Workshop

**Mon 23/08** (Chair: Phùng Hồ Hải)

8:45 – 9:00 Registration

9:00 – 10:30 Nguyễn Trung Nghĩa (online)

Coffee break

10:45 – 12:15 Phạm Khoa Bằng

Pause for lunch

14:00 – 15:30 Nguyễn Đăng Hợp

Coffee break

15: 45 – 17:15 Nguyễn Mạnh Linh (online)

**Tue 24/08** (Chair: Phùng Hồ Hải)

9:00 – 10:30 Phạm Thanh Tâm

Coffee break

10:45 – 12:15 Nguyễn Đại Dương

Pause for lunch

14:00 – 15:30 Nguyễn Quang Khải

Coffee break

15: 45 – 17:15 Phùng Hồ Hải

**Web 25/08** (Chair: Phùng Hồ Hải)

9:00 – 10:30 Võ Quốc Bảo

Coffee break

10:45 – 12:15 Đặng Tuấn Thương (online)

Pause for lunch

14:00 – 15:30 Nghiêm Trần Trung (online)

Coffee break

15: 45 – 17:15 Nguyễn Kiều Hiếu (online)

**Thu 26/08** (Chair: Phùng Hồ Hải)

9:00 – 10:30 Đặng Quốc Huy

Coffee break

10:45 – 12:15 Nguyễn Khánh Hưng

Pause for lunch

14:00 – 15:30 Phạm Ngô Thành Đạt (online)

Coffee break

15: 45 – 17:15 Nguyễn Mạnh Toàn (online)



# Workshop's Talks

## Tensor Categories

23 Aug  
9:00am

Nguyễn Trung Nghĩa, Ho Chi Minh  
HCM VNU University of Science

In this talk, we will introduce the notions of tensor categories, and subsequently of tensor functors. Then, we aim to show that every morphism of tensor functors of rigid tensor categories is an isomorphism.

---

## Abelian tensor categories

23 Aug  
10:45am

Phạm Khoa Bằng, Hanoi  
HUS VNU University of Science

The objective of this talk is to define the notion of abelian tensor categories. Afterwards, we will prove a criterion for a category to be rigid tensor. A number of examples will be provided in comparison with our main study, namely, the category of finite-dimensional representations of an affine group scheme over a field, which is well-known to be a rigid abelian tensor one.

---

## Affine schemes and affine group schemes

23 Aug  
14:00pm

Nguyễn Đăng Hợp, Hanoi  
Institute of Mathematics

Let  $k$  be a commutative ring, not necessarily a field. There are (at least) three ways to answer the question: What is a group scheme over  $k$ ? First, a group scheme over  $k$  is a functor from  $k$ -algebras to groups given by a  $k$ -algebra  $A$  (such a functor is called representable). Second, a group scheme over  $k$  is a group object in the category of schemes over  $k$ . Third, a group scheme can be seen as a  $k$ -algebra  $A$  with a certain structure called commutative Hopf algebra. For example, there is a group scheme called the additive group. It is given by three possible ways:

- 1) The functor mapping a  $k$ -algebra  $R$  to the abelian group  $R$  itself, this functor is given by the ring  $A = k[X]$  (polynomial ring in one variable  $X$ ), since  $\text{Hom}_k(k[X], R) = R$ .

- 2)  $\text{Spec}(k[X])$ , a scheme over  $k$ , with certain "group structure over  $k$ "
- 3) The ring  $k[X]$  with certain operations called comultiplication, counit, and coinverse (opposite to the usual notions without "co" in the definition of groups).

Affine group schemes are group schemes over  $k$ , such that, from the first point of view, the corresponding ring  $A$  is finitely generated as a  $k$ -algebra. In this talk, I will explain the answer to the question: What is a group scheme over  $k$ ?, reviewing the above three approaches, and their relationship.

---

23 Aug  
15:45pm

## Representations and Comodules

Nguyễn Mạnh Linh, Paris  
École normale supérieure

In this talk, representations of a  $k$ -group functor, where  $k$  is a field, are defined. We also investigate modules over  $k$ -coalgebras. We then show that for an affine  $k$ -group  $G$ , the category of its representations is isomorphic to that of right modules over its coordinate Hopf algebra  $k[G]$ .

---

24 Aug  
9:00am

## Neutral Tannakian categories

Phạm Thanh Tâm, Hanoi  
Hanoi Pedagogical University 2

Một phạm trù Tannaka trung tính (neutral) trên trường  $k$  là phạm trù tensor abelian rắn (rigid)  $\mathcal{C}$  trang bị cùng một  $k$ -hàm tử tensor  $\omega : \mathcal{C} \rightarrow \text{Vect}_k$  từ phạm trù  $\mathcal{C}$  đến phạm trù của các  $k$ -không gian véc tơ hữu hạn chiều  $\text{Vect}_k$ . Mục tiêu của bài nói là định lý chính của phạm trù Tannaka trung tính:

1. Hàm tử  $\underline{\text{Aut}}^{\otimes}(\omega)$  của các  $k$ -đại số biểu diễn bởi một lược đồ nhóm affine  $G$ .
  2. Phạm trù  $\mathcal{C}$  và phạm trù  $\text{Rep}_k(G)$  của các biểu diễn của  $G$  trên  $k$  là tương đương.
- 

24 Aug  
10:45am

## Recovering affine group scheme from its representation

Nguyễn Đại Dương, Danang  
The University of Danang – University of Science and Education

In this talk, I will present the structure of the affine group scheme over a field in which every affine group scheme is the inverse limit of algebraic groups and detail how to reconstruct an affine group scheme from its representations. For the rest, we will discuss Hai's paper with the title: "On an injective lemma in the proof of Tannaka duality".

---

# Grothendieck-Deligne-Saavedra Theorem

24 Aug  
14:00pm

Nguyễn Quang Khải, Hanoi  
Institute of Mathematics

In this talk, we present the Main theorem for Tannakian categories. It turns out that every Tannakian category is equivalent to the category of finite-dimensional representations of an affine group scheme.

---

## Examples of Tannakian categories

24 Aug  
15:45pm

Phùng Hồ Hải, Hanoi  
Institute of Mathematics

1. Some remarks on (neutral) tannakian categories
  - tensor structure, categorical dimension
  - fiber functor
  - reconstruction theorem
2. Examples
  - representations of groups, tannakian envelopes
  - Hodge's structure
  - connections
  - Picard-Vessiot
  - essentially finite bundles (Nori)
3. Fiber functors
  - sufficient conditions for the existence of fiber functors (Deligne, Roberts)
  - tangential fiber functors (Deligne-Katz)
  - Grothendieck section conjecture

---

## Galois category

25 Aug  
9:00am

Võ Quốc Bảo, Hanoi  
Institute of Mathematics

Mục tiêu của bài nói là phạm trù Galois  $(\mathcal{C}, F)$  và định lý cơ bản của lý thuyết phạm trù Galois: Mọi phạm trù Galois  $\mathcal{C}$  đều tương đương phạm trù với phạm trù  $\pi$ -finitesets, trong đó  $\pi = \text{Aut}(F)$  là nhóm hữu hạn.

---

25 Aug  
10:45am

## Étale fundamental groups

Đặng Tuấn Thương, Düsseldorf  
Düsseldorf University

Trong bài nói này, chúng ta sẽ định nghĩa nhóm cơ bản étale của lược đồ thông qua hàm tử thớ cùng một vài ví dụ. Cụ thể, chúng ta sẽ khảo sát cách xây dựng nhóm cơ bản của không gian tô-pô và sự tương tự trong cách xây dựng nhóm cơ bản étale của lược đồ theo Grothendieck.

---

25 Aug  
14:00pm

## Differential Galois Theory I

Nghiêm Trần Trung, Paris  
École normale supérieure

Tương tự như lý thuyết Galois cho phương trình đa thức, lý thuyết Galois vi phân bắt nguồn từ việc nghiên cứu sự tồn tại nghiệm của phương trình vi phân tuyến tính trên các mở rộng trường của trường cơ sở. Chúng ta sẽ đi tìm hiểu các khái niệm cơ bản của lý thuyết Galois vi phân, bắt đầu từ trường vi phân, mở rộng trường vi phân, cho tới mở rộng Picard-Vessiot (hay “trường phân rã vi phân”) và nhóm Galois vi phân. Giống với nhóm Galois cổ điển, nhóm Galois vi phân là các tự đẳng cấu của trường Picard-Vessiot, cố định trường cơ sở và giao hoán với phép vi phân. Các khái niệm này là nền tảng cho định lý Galois vi phân, phát biểu một cách ngắn gọn như sau : tồn tại một song ánh giữa các trường vi phân con với nhóm con đại số tuyến tính của nhóm Galois.

---

25 Aug  
15:45pm

## Differential Galois Theory II

Nguyễn Kiều Hiếu, Munich  
TU Munich

Trong bài giảng này, chúng ta sẽ tập trung khảo sát một vài dạng phương trình vi phân tuyến tính trên trường các chuỗi Laurent hình thức  $k((z))$ , ở đây  $k$  là một trường có đặc số 0. Chúng ta sẽ chứng minh sự tồn tại của nhóm Galois phổ quát và trình bày một góc nhìn của nó thông qua lý thuyết phạm trù Tannaka. Một mục tiêu nữa là sự mô tả của nhóm Galois phổ quát cho bài toán mà ta đang quan tâm, để làm được điều đó chúng ta cần một vài kết quả về dạng chuẩn tắc cùng với các monodromy của phương trình vi phân tuyến tính.

---

## Nori's fundamental group I

26 Aug  
9:00am

Đặng Quốc Huy, Hanoi  
Institute of Mathematics

This talk gives a brief introduction to Nori's fundamental group. When  $X$  is a scheme, its Nori fundamental group, denoted by  $\pi^N(X)$ , classifies isomorphism classes of  $X$ 's torsors under finite group schemes (while the classical étale fundamental group  $\pi^{\text{ét}}(X)$  categorizes  $X$ 's Galois covers). Along the way, we recall the notion of torsor and finite vector bundles. The following lecture will further discuss the relations between  $\pi^N(X)$  and  $\pi^{\text{ét}}(X)$ .

---

## Nori's fundamental group II

26 Aug  
10:45am

Nguyễn Khánh Hưng, Hanoi  
Institute of Mathematics

As the second part of the previous talk, this talk will propose two main results of fundamental group schemes. As the first result, the fundamental group scheme is represented as the inverse limit of finite  $k$ -group schemes. We will then show the comparison between the fundamental group scheme and the étale fundamental group.

---

## Mumford-Tate group I

26 Aug  
14:00pm

Phạm Ngô Thành Đạt, Paris  
Sorbonne University

A Hodge structure is an algebraic structure at the level of linear algebra. Fundamental examples of Hodge structures include the Betti cohomology groups of a smooth projective variety  $X/\mathbb{C}$ . In the first part of this talk, I will recall the notion of Hodge structures and show in details the fundamental observation of Deligne that, to give a real Hodge structure is the same as giving an algebraic representation of the Deligne torus  $\mathbb{S}$  on a real vector space. In fancier terms, this means that the group  $\mathbb{S}$  is the Tannakian group for the category of Hodge structures on real vector spaces. I then define the Mumford-Tate group associated to a rational Hodge structure and look at some of its basic properties.

---

26 Aug  
15:45pm

## Mumford-Tate group II

Nguyễn Mạnh Toàn, Osnabrück  
Osnabrück University

In this talk, we will first describe real Hodge structures in terms of representations of the Deligne torus. This approach provides us a more group-theoretic view than the classical definition. After that, we will discuss Mumford-Tate groups from a Tannakian perspective. In the end, we will focus on polarizable rational Hodge structures of CM-type, which are closely related to abelian varieties. We will show that these structures form a Tannakian category whose associated group scheme is the Serre group.

---