Phạm trù tensor abel

Phạm Khoa Bằng

Ngày 23 tháng 8 năm 2021

Outline

Định nghĩa 1.1

Một phạm trù *tensor cộng tính* (tương ứng, abel) là một phạm trù tensor $(\mathcal{C}, \otimes)$ sao cho $\mathcal{C}$ là một phạm trù cộng tính (tương ứng, abel) và $\otimes$ là một hàm tử song cộng tính; nói cách khác, $\otimes$ là cộng tính theo từng biến.

Định nghĩa 1.1

Một phạm trù *tensor cộng tính* (tương ứng, abel) là một phạm trù tensor $(\mathcal{C}, \otimes)$ sao cho $\mathcal{C}$ là một phạm trù cộng tính (tương ứng, abel) và $\otimes$ là một hàm tử song cộng tính; nói cách khác, $\otimes$ là cộng tính theo từng biến.

Nếu $\mathcal{C}$ là một phạm trù cộng tính và $(\mathbf{1}, e)$ là một vật đơn vị, khi đó $R = \mathrm{End}(\mathbf{1})$ là một vành giao hoán tác động lên từng vật $\mathrm{Hom}(X, Y)$ theo biểu đồ

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{1} \otimes X \arrow[r, "f \otimes g"] & \mathbf{1} \otimes Y \\
X \arrow[u, "l_X^{-1}"] \arrow[r] & Y, \arrow[u, "l_Y^{-1}"']
\end{tikzcd}$$

trong đó $X, Y \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C})$, $f \in R$, $g \in \mathrm{Hom}(X, Y)$.

Định nghĩa 1.1

Một phạm trù *tensor cộng tính* (tương ứng, abel) là một phạm trù tensor $(\mathcal{C}, \otimes)$ sao cho $\mathcal{C}$ là một phạm trù cộng tính (tương ứng, abel) và $\otimes$ là một hàm tử song cộng tính; nói cách khác, $\otimes$ là cộng tính theo từng biến.

Nếu $\mathcal{C}$ là một phạm trù cộng tính và $(\mathbf{1}, e)$ là một vật đơn vị, khi đó $R = \mathrm{End}(\mathbf{1})$ là một vành giao hoán tác động lên từng vật $\mathrm{Hom}(X, Y)$ theo biểu đồ

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{1} \otimes X \arrow[r, "f \otimes g"] & \mathbf{1} \otimes Y \\
X \arrow[u, "l_X^{-1}"] \arrow[r] & Y, \arrow[u, "l_Y^{-1}"']
\end{tikzcd}$$

trong đó $X, Y \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C}), f \in R, g \in \mathrm{Hom}(X, Y)$.

Định nghĩa 1.2

Một phạm trù $\mathcal{C}$ mà mỗi tập hom đều có cấu trúc của một R-module, $\circ$ là R-tuyến tính được gọi là một phạm trù *R-tuyến tính*.

Định lí 1.3

Cho $(\mathcal{C}, \otimes)$ là một phạm trù tensor cứng. Nếu $\mathcal{C}$ là abel thì $\otimes$ là tử song cộng tính và nó giao hoán với đối giới hạn và giới hạn theo từng biến; nói riêng, nó là khớp theo từng biến.

Định lí 1.3

Cho $(\mathcal{C}, \otimes)$ *là một phạm trù tensor cứng. Nếu* $\mathcal{C}$ *là abel thì* $\otimes$ *là tử song cộng tính và nó giao hoán với đối giới hạn và giới hạn theo từng biến; nói riêng, nó là khớp theo từng biến.*

Chứng minh.

Hàm tử $X \rightsquigarrow X \otimes Y$ có liên hợp phải là hàm tử $Z \mapsto \underline{\mathrm{Hom}}(Y, Z)$ và do đó nó giao hoán với đối giới hạn và cộng tính. Tương tự, bằng cách xét phạm trù đối $\mathcal{C}^{opp}$ ta suy ra nó giao hoán với giới hạn (thậm chí $Z \rightsquigarrow \underline{\mathrm{Hom}}(Y, Z)$ cũng là liên hợp trái của $X \rightsquigarrow X \otimes Y$ luôn).

Định lí 1.3

Cho $(\mathcal{C}, \otimes)$ *là một phạm trù tensor cứng. Nếu* $\mathcal{C}$ *là abel thì* $\otimes$ *là tử song cộng tính và nó giao hoán với đối giới hạn và giới hạn theo từng biến; nói riêng, nó là khớp theo từng biến.*

Chứng minh.

Hàm tử $X \rightsquigarrow X \otimes Y$ có liên hợp phải là hàm tử $Z \mapsto \underline{\mathrm{Hom}}(Y, Z)$ và do đó nó giao hoán với đối giới hạn và cộng tính. Tương tự, bằng cách xét phạm trù đối $\mathcal{C}^{opp}$ ta suy ra nó giao hoán với giới hạn (thậm chí $Z \rightsquigarrow \underline{\mathrm{Hom}}(Y, Z)$ cũng là liên hợp trái của $X \rightsquigarrow X \otimes Y$ luôn). Cuối cùng ta biết rằng trong một phạm trù abel một hàm tử cộng tính giao hoán với cả giới hạn và đối giới hạn thì sẽ khớp. $\square$

Điều kiện để $\mathbf{1}$ là vật đơn

Định lí 1.4

Cho $(C, \otimes)$ *là một phạm trù tensor abel cứng. Nếu* U *là một vật con của* $\mathbf{1}$ *thì* $1 = U \oplus U^{\perp}$*, trong đó* $U^{\perp} = \mathrm{Ker}(\mathbf{1} \to U^{\vee})$*. Hệ quả là* $\mathbf{1}$ *là vật đơn (không có vật con không tầm thường) khi và chỉ khi* $\mathrm{End}(\mathbf{1})$ *là một trường.*

Định lí 1.4

Cho $(C, \otimes)$ *là một phạm trù tensor abel cứng. Nếu* U *là một vật con của* $\mathbf{1}$ *thì* $1 = U \oplus U^{\perp}$*, trong đó* $U^{\perp} = \mathrm{Ker}(\mathbf{1} \to U^{\vee})$*. Hệ quả là* $\mathbf{1}$ *là vật đơn (không có vật con không tầm thường) khi và chỉ khi* $\mathrm{End}(\mathbf{1})$ *là một trường.*

Chứng minh.

Đặt $V = \mathrm{Coker}(U \to \mathbf{1})$. Tensor dãy khớp

$$0 \to U \to \mathbf{1} \to V \to 0$$

Điều kiện để $\mathbf{1}$ là vật đơn

Định lí 1.4

Cho $(C, \otimes)$ là một phạm trù tensor abel cứng. Nếu U là một vật con của $\mathbf{1}$ thì $1 = U \oplus U^{\perp}$, trong đó $U^{\perp} = \mathrm{Ker}(\mathbf{1} \to U^{\vee})$. Hệ quả là $\mathbf{1}$ là vật đơn (không có vật con không tầm thường) khi và chỉ khi $\mathrm{End}(\mathbf{1})$ là một trường.

Chứng minh.

Đặt $V = \mathrm{Coker}(U \to \mathbf{1})$. Tensor dãy khớp

$$0 \to U \to \mathbf{1} \to V \to 0$$

với $U \hookrightarrow \mathbf{1}$ cho ta một biểu đồ giao hoán

$$\begin{tikzcd}
U \arrow[r, hook] & \mathbf{1} \arrow[r, two heads] & V \\
U \otimes U \arrow[u, hook] \arrow[r, hook] & U \arrow[u, hook] \arrow[r, two heads] \arrow[ur, dashed] & V \otimes U, \arrow[u, hook]
\end{tikzcd}$$

trong đó tính đơn-toàn của các cấu xạ tới từ việc tensor là hàm tử khớp. $\square$

Điều kiện để $\mathbf{1}$ là vật đơn

Chứng minh.

Từ hình vuông

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{1} \arrow[r, two heads] & V \\
U \arrow[u, hook] \arrow[r, two heads] \arrow[ur, dashed, two heads] & V \otimes U. \arrow[u, hook]
\end{tikzcd}$$

ta cũng suy ra $V \otimes U = 0$.

Chứng minh.

Từ hình vuông

$$\begin{tikzcd} \mathbf{1} \arrow[r, two heads] & V \\ U \arrow[u, hook] \arrow[r, two heads] \arrow[ur, dashed, two heads] & V \otimes U. \arrow[u, hook] \end{tikzcd}$$

ta cũng suy ra $V \otimes U = 0$. Bây giờ với mỗi vật T ta có

$$T \otimes U = 0 \Leftrightarrow \text{ cấu xạ } T \otimes U \to T \text{ là không } \Leftrightarrow \text{ cấu xạ } T \to U^{\vee} \otimes T \text{ là không.}$$

Chứng minh.

Từ hình vuông

$$\begin{tikzcd} \mathbf{1} \arrow[r, two heads] & V \\ U \arrow[u, hook] \arrow[r, two heads] \arrow[ur, dashed, two heads] & V \otimes U. \arrow[u, hook] \end{tikzcd}$$

ta cũng suy ra $V \otimes U = 0$. Bây giờ với mỗi vật T ta có

$$T \otimes U = 0 \Leftrightarrow \text{ cấu xạ } T \otimes U \to T \text{ là không } \Leftrightarrow \text{ cấu xạ } T \to U^\vee \otimes T \text{ là không.}$$

Do đó với mỗi vật X thì vật con T lớn nhất của X mà $T \otimes U = 0$ là vật con lớn nhất mà $T \to U^\vee \otimes X$ là cấu xạ không; do đó

$$T = \operatorname{Ker}(X \to U^\vee \otimes X) \cong U^\perp \otimes X.$$

Điều kiện để **1** là vật đơn

Chứng minh.

Từ hình vuông

$$\begin{tikzcd} \mathbf{1} \arrow[r, two heads] & V \\ U \arrow[u, hook] \arrow[r, two heads] \arrow[ur, dashed] & V \otimes U. \arrow[u, hook] \end{tikzcd}$$

ta cũng suy ra $V \otimes U = 0$. Bây giờ với mỗi vật T ta có

$$T \otimes U = 0 \Leftrightarrow \text{ cấu xạ } T \otimes U \to T \text{ là không } \Leftrightarrow \text{ cấu xạ } T \to U^\vee \otimes T \text{ là không.}$$

Do đó với mỗi vật X thì vật con T lớn nhất của X mà $T \otimes U = 0$ là vật con lớn nhất mà $T \to U^\vee \otimes X$ là cấu xạ không; do đó

$$T = \mathrm{Ker}(X \to U^\vee \otimes X) \cong U^\perp \otimes X.$$

Áp dụng khi $X = V$ và $V \otimes U = 0$ ta thấy $V \cong U^\perp \otimes V$. □

Điều kiện để $\mathbf{1}$ là vật đơn

Chứng minh.

Từ hình vuông

$$\begin{tikzcd} U \arrow[r, hook] & \mathbf{1} \\ U \otimes U \arrow[u, hook] \arrow[r, hook] & U \arrow[u, hook] \end{tikzcd}$$

ta thấy $U \otimes U = U$ xem như vật con của $\mathbf{1} \otimes \mathbf{1} = \mathbf{1}$, do đó ta áp dụng khi $X = U$ ta suy ra $T = \mathrm{Ker}(U \to U^\vee \otimes X)$.

Điều kiện để $\mathbf{1}$ là vật đơn

Chứng minh.

Từ hình vuông

$$\begin{tikzcd} U \arrow[r, hook] & \mathbf{1} \\ U \otimes U \arrow[u, hook] \arrow[r, hook] & U \arrow[u, hook] \end{tikzcd}$$

ta thấy $U \otimes U = U$ xem như vật con của $\mathbf{1} \otimes \mathbf{1} = \mathbf{1}$, do đó ta áp dụng khi $X = U$ ta suy ra $T = \mathrm{Ker}(U \to U^\vee \otimes X)$. Từ đây ta thấy $T \otimes U = 0$, hay

$$0 = T \otimes U = U^\perp \otimes U \otimes U = U^\perp \otimes U.$$

Điều kiện để $\mathbf{1}$ là vật đơn

Chứng minh.

Từ hình vuông

$$\begin{tikzcd} U \arrow[r, hook] & \mathbf{1} \\ U \otimes U \arrow[u, hook] \arrow[r, hook] & U \arrow[u, hook] \end{tikzcd}$$

ta thấy $U \otimes U = U$ xem như vật con của $\mathbf{1} \otimes \mathbf{1} = \mathbf{1}$, do đó ta áp dụng khi $X = U$ ta suy ra $T = \mathrm{Ker}(U \to U^\vee \otimes X)$. Từ đây ta thấy $T \otimes U = 0$, hay

$$0 = T \otimes U = U^\perp \otimes U \otimes U = U^\perp \otimes U.$$

Từ dãy khớp

$$0 \to U^\perp \otimes U \to U^\perp \otimes \mathbf{1} \to U^\perp \otimes V \to 0$$

ta suy ra $U^\perp \cong V$ và do đó $\mathbf{1} \cong U^\perp \oplus U$. $\square$

Điều kiện để $\mathbf{1}$ là vật đơn

Định lí 1.5

Cho $\mathcal{C}, \mathcal{C}'$ *là hai phạm trù tensor abel cứng và giả sử rằng* $\mathbf{1}, \mathbf{1}'$ *lần lượt là hai vật đơn vị của* C, C' *sao cho* $\mathrm{End}(\mathbf{1})$ *là một trường và* $\mathbf{1}' \neq 0$*. Khi đó mọi hàm tử tensor khớp* $F : \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ *là trung thành.*

Định lí 1.5

Cho $\mathcal{C}, \mathcal{C}'$ *là hai phạm trù tensor abel cứng và giả sử rằng* $\mathbf{1}, \mathbf{1}'$ *lần lượt là hai vật đơn vị của* C, C' *sao cho* $\mathrm{End}(\mathbf{1})$ *là một trường và* $\mathbf{1}' \neq 0$*. Khi đó mọi hàm tử tensor khớp* $F : \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ *là trung thành.*

Bổ đề 1.6

Với các giả thiết như trên thì với mỗi vật $X \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C})$ *thì* $X \neq 0$ *khi và chỉ khi* $\mathrm{ev} : X^\vee \otimes X \to \mathbf{1}$ *là toàn cấu.*

Điều kiện để $\mathbf{1}$ là vật đơn

Định lí 1.5

Cho $\mathcal{C}, \mathcal{C}'$ là hai phạm trù tensor abel cứng và giả sử rằng $\mathbf{1}, \mathbf{1}'$ lần lượt là hai vật đơn vị của C, C' sao cho $\mathrm{End}(\mathbf{1})$ là một trường và $\mathbf{1}' \neq 0$. Khi đó mọi hàm tử tensor khớp $F : \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ là trung thành.

Bổ đề 1.6

Với các giả thiết như trên thì với mỗi vật $X \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C})$ thì $X \neq 0$ khi và chỉ khi $\mathrm{ev} : X^\vee \otimes X \to \mathbf{1}$ là toàn cấu.

Chứng minh.

Giả sử ngược lại rằng ev không phải toàn cấu, khi đó tồn tại một vật $Z \in \mathrm{Obj}(C)$ và hai cấu xạ *phân biệt* $\alpha, \beta : \mathbf{1} \to Z$ sao cho $\alpha \circ \mathrm{ev} = \beta \circ \mathrm{ev}$. Do đó ev tách qua một đơn cấu $\mathrm{Ker}(\alpha - \beta) \hookrightarrow \mathbf{1}$. Tuy nhiên do $\mathrm{End}(\mathbf{1})$ là một trường nên $\mathbf{1}$ là một vật đơn, từ đây hoặc $\mathrm{Ker}(\alpha - \beta) \cong 0$ hoặc $\mathrm{Ker}(\alpha - \beta) \cong \mathbf{1}$. Tuy nhiên nếu $\mathrm{Ker}(\alpha - \beta) \cong \mathbf{1}$ thì $\alpha - \beta$ là cấu xạ không, điều này không xảy ra do ta giả sử $\alpha \neq \beta$. Nếu $\mathrm{Ker}(\alpha - \beta) = 0$ thì ev là toàn cấu. □

Hàm tử tensor khớp là trung thành

Chứng minh.

Đẳng cấu

$$\mathrm{Hom}(X^\vee \otimes X, \mathbf{1}) \cong \mathrm{Hom}(X^\vee, X^\vee)$$

gửi ev đến $\mathrm{id}_{X^\vee}$ và do đó $\mathrm{id}_{X^\vee} = 0$, hay $X^\vee = 0$. Từ tính phản xạ ta có $X \cong (X^\vee)^\vee = 0$. Một hàm tử tensor F sẽ bảo toàn điều kiện

$$X \neq 0 \Leftrightarrow X^\vee \otimes X \to \mathbf{1} \text{ là toàn cấu.}$$

Nói cách khác, F là trung thành. $\square$

Định lí 1.7

‘Cho C là một phạm trù abel k-tuyến tính, trong đó k là một trường, và gọi $\otimes : C \times C \to C$ là một hàm tử song k-tuyến tính. Giả sử tồn tại một hàm tử k tuyến tính, trung thành, khớp $F : C \to \mathrm{Vect}_k$, một đẳng cấu tự nhiên

$$\phi_{X,Y,Z} : X \otimes (Y \otimes Z) \to (X \otimes Y) \otimes Z,$$

và một đẳng cấu

$$\psi_{X,Y} : X \otimes Y \to Y \otimes X$$

Định lí 1.7

'Cho C là một phạm trù abel k-tuyến tính, trong đó k là một trường, và gọi $\otimes : C \times C \to C$ là một hàm tử song k-tuyến tính. Giả sử tồn tại một hàm tử k tuyến tính, trung thành, khớp $F : C \to \mathrm{Vect}_k$, một đẳng cấu tự nhiên

$$\phi_{X,Y,Z} : X \otimes (Y \otimes Z) \to (X \otimes Y) \otimes Z,$$

và một đẳng cấu

$$\psi_{X,Y} : X \otimes Y \to Y \otimes X$$

thỏa mãn các điều kiện sau:

- $F \circ \otimes = \otimes \circ (F \times F)$;

Một tiểu chuẩn để phạm trù là tensor cứng

Định lí 1.7

‘Cho C là một phạm trù abel k-tuyến tính, trong đó k là một trường, và gọi $\otimes : C \times C \to C$ là một hàm tử song k-tuyến tính. Giả sử tồn tại một hàm tử k tuyến tính, trung thành, khớp $F : C \to \mathrm{Vect}_k$, một đẳng cấu tự nhiên

$$\phi_{X,Y,Z} : X \otimes (Y \otimes Z) \to (X \otimes Y) \otimes Z,$$

và một đẳng cấu

$$\psi_{X,Y} : X \otimes Y \to Y \otimes X$$

thỏa mãn các điều kiện sau:

- $F \circ \otimes = \otimes \circ (F \times F)$*;*
- $F(\phi_{X,Y,Z})$ *là đẳng cấu kết hợp thông thường;*
- $F(\psi_{X,Y})$ *là đẳng cấu giao hoán thông thường;*

Định lí 1.7

'Cho C là một phạm trù abel k-tuyến tính, trong đó k là một trường, và gọi $\otimes : C \times C \to C$ là một hàm tử song k-tuyến tính. Giả sử tồn tại một hàm tử k tuyến tính, trung thành, khớp $F : C \to \mathrm{Vect}_k$, một đẳng cấu tự nhiên

$$\phi_{X,Y,Z} : X \otimes (Y \otimes Z) \to (X \otimes Y) \otimes Z,$$

và một đẳng cấu

$$\psi_{X,Y} : X \otimes Y \to Y \otimes X$$

thỏa mãn các điều kiện sau:

- $F \circ \otimes = \otimes \circ (F \times F)$;
- $F(\phi_{X,Y,Z})$ *là đẳng cấu kết hợp thông thường;*
- $F(\psi_{X,Y})$ *là đẳng cấu giao hoán thông thường;*
- *tồn tại một vật đơn vị* $\mathbf{1}$ *trong* C *và* $k \to \mathrm{End}(\mathbf{1})$ *là một đẳng cấu, và* $\dim_k F(\mathbf{1}) = 1$;

Một tiểu chuẩn để phạm trù là tensor cứng

Định lí 1.7

'Cho C là một phạm trù abel k-tuyến tính, trong đó k là một trường, và gọi $\otimes : C \times C \to C$ là một hàm tử song k-tuyến tính. Giả sử tồn tại một hàm tử k tuyến tính, trung thành, khớp $F : C \to \mathrm{Vect}_k$, một đẳng cấu tự nhiên

$$\phi_{X,Y,Z} : X \otimes (Y \otimes Z) \to (X \otimes Y) \otimes Z,$$

và một đẳng cấu

$$\psi_{X,Y} : X \otimes Y \to Y \otimes X$$

thỏa mãn các điều kiện sau:

- $F \circ \otimes = \otimes \circ (F \times F)$*;*
- $F(\phi_{X,Y,Z})$ *là đẳng cấu kết hợp thông thường;*
- $F(\psi_{X,Y})$ *là đẳng cấu giao hoán thông thường;*
- *tồn tại một vật đơn vị* $\mathbf{1}$ *trong* C *và* $k \to \mathrm{End}(\mathbf{1})$ *là một đẳng cấu, và* $\dim_k F(\mathbf{1}) = 1$*;*
- *nếu* $F(L)$ *có chiều* 1 *thì tồn tại một vật* L^{-1} *mà* $L \otimes L^{-1} = \mathbf{1}$*.*

Một tiểu chuẩn để phạm trù là tensor cứng

Định lí 1.7

‘Cho C là một phạm trù abel k-tuyến tính, trong đó k là một trường, và gọi $\otimes : C \times C \to C$ là một hàm tử song k-tuyến tính. Giả sử tồn tại một hàm tử k tuyến tính, trung thành, khớp $F : C \to \mathrm{Vect}_k$, một đẳng cấu tự nhiên

$$\phi_{X,Y,Z} : X \otimes (Y \otimes Z) \to (X \otimes Y) \otimes Z,$$

và một đẳng cấu

$$\psi_{X,Y} : X \otimes Y \to Y \otimes X$$

thỏa mãn các điều kiện sau:

- $F \circ \otimes = \otimes \circ (F \times F)$;
- $F(\phi_{X,Y,Z})$ *là đẳng cấu kết hợp thông thường;*
- $F(\psi_{X,Y})$ *là đẳng cấu giao hoán thông thường;*
- *tồn tại một vật đơn vị* $\mathbf{1}$ *trong* C *và* $k \to \mathrm{End}(\mathbf{1})$ *là một đẳng cấu, và* $\dim_k F(\mathbf{1}) = 1$;
- *nếu* $F(L)$ *có chiều* 1 *thì tồn tại một vật* L^{-1} *mà* $L \otimes L^{-1} = \mathbf{1}$.

Khi đó $(C, \otimes, \phi, \psi)$ *là một phạm trù tensor abel cứng.*

Vật khả đối ngẫu

Định nghĩa 2.1

Cho C là một phạm trù tensor, một vật $X \in \mathrm{Obj}(C)$ được gọi là *khả đối ngẫu* nếu tồn tại một vật $X^\star \in \mathrm{Obj}(C)$ và hai cấu xạ

$$\mathrm{coev} : \mathbf{1} \to X \otimes X^\star, \ \mathrm{ev} : X^\star \otimes X \to \mathbf{1}$$

Định nghĩa 2.1

Cho C là một phạm trù tensor, một vật $X \in \mathrm{Obj}(C)$ được gọi là *khả đối ngẫu* nếu tồn tại một vật $X^\star \in \mathrm{Obj}(C)$ và hai cấu xạ

$$\mathrm{coev} : \mathbf{1} \to X \otimes X^\star, \ \mathrm{ev} : X^\star \otimes X \to \mathbf{1}$$

sao cho các hợp thành

$$X \xrightarrow{\mathrm{coev} \otimes \mathrm{id}_X} X \otimes X^\star \otimes X \xrightarrow{\mathrm{id}_X \otimes \mathrm{ev}} X,$$
$$X^\star \xrightarrow{\mathrm{id}_{X^\star} \otimes \mathrm{coev}} X^\star \otimes X \otimes X^\star \xrightarrow{\mathrm{ev} \otimes \mathrm{id}_{X^\star}} X^\star$$

đều là các cấu xạ đồng nhất. Nếu X là khả đối ngẫu thì một vật $X^\star$ như vậy sẽ gọi là *vật đối ngẫu* của X.

Định nghĩa 2.1

Cho C là một phạm trù tensor, một vật $X \in \mathrm{Obj}(C)$ được gọi là *khả đối ngẫu* nếu tồn tại một vật $X^\star \in \mathrm{Obj}(C)$ và hai cấu xạ

$$\mathrm{coev} : \mathbf{1} \to X \otimes X^\star, \ \mathrm{ev} : X^\star \otimes X \to \mathbf{1}$$

sao cho các hợp thành

$$X \xrightarrow{\mathrm{coev} \otimes \mathrm{id}_X} X \otimes X^\star \otimes X \xrightarrow{\mathrm{id}_X \otimes \mathrm{ev}} X,$$

$$X^\star \xrightarrow{\mathrm{id}_{X^\star} \otimes \mathrm{coev}} X^\star \otimes X \otimes X^\star \xrightarrow{\mathrm{ev} \otimes \mathrm{id}_{X^\star}} X^\star$$

đều là các cấu xạ đồng nhất. Nếu X là khả đối ngẫu thì một vật $X^\star$ như vậy sẽ gọi là *vật đối ngẫu* của X.

Nhận xét. Nếu $X^\star$ là vật đối ngẫu của X thì X là vật đối ngẫu của $X^\star$; nói cách khác, X là *phản xạ*.

Ví dụ về đối ngẫu của không gian vector

Ví dụ 2.2

Cho k là một trường và V là một không gian vector hữu hạn chiều trên k với một cơ sở là $v_1, ..., v_n$, khi đó đối định giá được định nghĩa bởi

$$\begin{aligned} \mathrm{coev} : k &\to V \otimes V^\vee \\ 1 &\mapsto \sum_{i=1}^{n} v_i \otimes v_i^\vee, \end{aligned}$$

trong đó $v_1^\vee, ..., v_n^\vee$ là cơ sở đối ngẫu của $v_1, ..., v_n$. Ta có thể kiểm tra rằng định nghĩa này không phụ thuộc vào cách chọn cơ sở. Đối định giá trên cũng định nghĩa tốt khi k là một vành giao hoán, V là một k-module tự do.

Ví dụ 2.3

Nếu $\mathcal{C} = \mathrm{Mod}_R$ với R là một vành giao hoán và P là một module xạ ảnh hữu hạn sinh thì P là khả đối ngẫu.

Ví dụ 2.3

Nếu $\mathcal{C} = \mathrm{Mod}_R$ với R là một vành giao hoán và P là một module xạ ảnh hữu hạn sinh thì P là khả đối ngẫu.
Thật vậy, tồn tại một toàn cấu $x : R^n \twoheadrightarrow P$ và một cấu xạ $\alpha : P \to R^n$ sao cho $x\alpha = \mathrm{id}$ (chẻ).

$$x : R^n \twoheadrightarrow P \Leftrightarrow \exists \mathrm{span}(x_1, ..., x_n) = P$$
$$\alpha : P \to R^n \Leftrightarrow \alpha_1, ..., \alpha_n \in \mathrm{Hom}(P, R) = P^\vee.$$

Ví dụ 2.3

Nếu $\mathcal{C} = \mathrm{Mod}_R$ với R là một vành giao hoán và P là một module xạ ảnh hữu hạn sinh thì P là khả đối ngẫu.
Thật vậy, tồn tại một toàn cấu $x : R^n \twoheadrightarrow P$ và một cấu xạ $\alpha : P \to R^n$ sao cho $x\alpha = \mathrm{id}$ (chẻ).

$$x : R^n \twoheadrightarrow P \Leftrightarrow \exists \mathrm{span}(x_1, ..., x_n) = P$$
$$\alpha : P \to R^n \Leftrightarrow \alpha_1, ..., \alpha_n \in \mathrm{Hom}(P, R) = P^\vee.$$

Điều kiện $x\alpha = \mathrm{id}$ nói rằng

$$x = \alpha_1(x)x_1 + ... + \alpha_n(x)x_n \;\forall\, x \in P.$$

Ví dụ 2.3

Nếu $\mathcal{C} = \mathrm{Mod}_R$ với R là một vành giao hoán và P là một module xạ ảnh hữu hạn sinh thì P là khả đối ngẫu.
Thật vậy, tồn tại một toàn cấu $x : R^n \twoheadrightarrow P$ và một cấu xạ $\alpha : P \to R^n$ sao cho $x\alpha = \mathrm{id}$ (chẻ).

$$x : R^n \twoheadrightarrow P \Leftrightarrow \exists \mathrm{span}(x_1, ..., x_n) = P$$
$$\alpha : P \to R^n \Leftrightarrow \alpha_1, ..., \alpha_n \in \mathrm{Hom}(P, R) = P^\vee.$$

Điều kiện $x\alpha = \mathrm{id}$ nói rằng

$$x = \alpha_1(x)x_1 + ... + \alpha_n(x)x_n \ \forall\ x \in P.$$

Cấu xạ

$$\mathrm{coev} : R \to P \otimes P^\vee$$
$$1 \mapsto \sum_{i=1}^{n} x_i \otimes \alpha_i$$

định nghĩa cho ta một đối định giá.

Đối ngẫu qua hàm tử tensor

Ví dụ 2.4

Cho $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ là hai phạm trù tensor và $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ là một hàm tử tensor.

Đối ngẫu qua hàm tử tensor

Ví dụ 2.4

Cho $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ là hai phạm trù tensor và $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ là một hàm tử tensor.
Nếu $X \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C})$ có đối ngẫu $(X^\star, \mathrm{ev}_X, \mathrm{coev}_X)$ thì đối ngẫu của $F(X)^\star$ là

$$(F(X^\star), \mathrm{ev}_{FX}, \mathrm{coev}_{FX}),$$

Ví dụ 2.4

Cho $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ là hai phạm trù tensor và $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ là một hàm tử tensor.
Nếu $X \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C})$ có đối ngẫu $(X^\star, \mathrm{ev}_X, \mathrm{coev}_X)$ thì đối ngẫu của $F(X)^\star$ là

$$(F(X^\star), \mathrm{ev}_{FX}, \mathrm{coev}_{FX}),$$

trong đó

$$\begin{aligned} \mathrm{ev}_{FX} &= \alpha \circ F(\mathrm{ev}_X) \circ c^{-1}_{X^\star, X} \\ \mathrm{coev}_{FX} &= c_{X,X^\star} \circ F(\mathrm{coev}_X) \circ \alpha^{-1} \\ \alpha &: \text{ đẳng cấu } F(\mathbf{1}_\mathcal{C}) \xrightarrow{\cong} \mathbf{1}_\mathcal{D} \\ c_{X,Y} &: \text{ đẳng cấu } F(X \otimes Y) \xrightarrow{\cong} FX \otimes FY. \end{aligned}$$

Ví dụ 2.5

Cho $\mathcal{C}$ là một phạm trù tensor, giả sử X, Y là hai vật khả đối ngẫu trong $\mathcal{C}$. Khi đó $X \otimes Y$ cũng là vật khả đối ngẫu.

Ví dụ 2.5

Cho $\mathcal{C}$ là một phạm trù tensor, giả sử X, Y là hai vật khả đối ngẫu trong $\mathcal{C}$. Khi đó $X \otimes Y$ cũng là vật khả đối ngẫu.

$$\mathrm{ev}_{X\otimes Y} = \mathrm{ev}_X \circ (X \otimes \mathrm{ev}_Y \otimes X^\star)$$
$$\mathrm{coev}_{X\otimes Y} = (X \otimes \mathrm{coev}_Y \otimes X^\star) \circ \mathrm{coev}_X$$

cùng $Y^\star \otimes X^\star$ là vật đối ngẫu của $X \otimes Y$.

Một định nghĩa khác của phạm trù tensor cứng

Định lí 2.6

Cho C là một phạm trù tensor sao cho $\underline{\mathrm{Hom}}(X, Y)$ *tồn tại với mọi các vật* $X, Y \in \mathrm{Obj}(C)$*, khi đó C là phạm trù tensor cứng khi và chỉ khi mọi vật trong C là khả đối ngẫu. Hơn nữa khi đó ta còn có* $X^\vee \cong X^\star$ *với mọi vật* $X \in \mathrm{Obj}(C)$.

Một định nghĩa khác của phạm trù tensor cứng

Định lí 2.6

Cho C là một phạm trù tensor sao cho $\underline{\mathrm{Hom}}(X,Y)$ *tồn tại với mọi các vật* $X, Y \in \mathrm{Obj}(C)$, *khi đó C là phạm trù tensor cứng khi và chỉ khi mọi vật trong C là khả đối ngẫu. Hơn nữa khi đó ta còn có* $X^\vee \cong X^\star$ *với mọi vật* $X \in \mathrm{Obj}(C)$.

Chứng minh.

($\Rightarrow$) Giả sử C là cứng, ta biết rằng với mọi vật $X \in \mathrm{Obj}(C)$ thì

$$\mathrm{Hom}(\mathbf{1}, \underline{\mathrm{Hom}}(X,X)) \cong \mathrm{Hom}(X,X).$$

Một định nghĩa khác của phạm trù tensor cứng

Định lí 2.6

Cho C là một phạm trù tensor sao cho $\underline{\mathrm{Hom}}(X, Y)$ tồn tại với mọi các vật $X, Y \in \mathrm{Obj}(C)$, khi đó C là phạm trù tensor cứng khi và chỉ khi mọi vật trong C là khả đối ngẫu. Hơn nữa khi đó ta còn có $X^\vee \cong X^\star$ với mọi vật $X \in \mathrm{Obj}(C)$.

Chứng minh.

($\Rightarrow$) Giả sử C là cứng, ta biết rằng với mọi vật $X \in \mathrm{Obj}(C)$ thì

$$\mathrm{Hom}(\mathbf{1}, \underline{\mathrm{Hom}}(X, X)) \cong \mathrm{Hom}(X, X).$$

Ta định nghĩa đối định giá

$$\mathrm{coev} : \mathbf{1} \to \underline{\mathrm{Hom}}(X, X) \cong X^\vee \otimes X \overset{\psi}{\cong} X \otimes X^\vee$$

là cấu xạ tương ứng với $\mathrm{id} : X \to X$ qua song ánh trên.

Một định nghĩa khác của phạm trù tensor cứng

Định lí 2.6

Cho C là một phạm trù tensor sao cho $\underline{\mathrm{Hom}}(X, Y)$ tồn tại với mọi các vật $X, Y \in \mathrm{Obj}(C)$, khi đó C là phạm trù tensor cứng khi và chỉ khi mọi vật trong C là khả đối ngẫu. Hơn nữa khi đó ta còn có $X^\vee \cong X^\star$ với mọi vật $X \in \mathrm{Obj}(C)$.

Chứng minh.

($\Rightarrow$) Giả sử C là cứng, ta biết rằng với mọi vật $X \in \mathrm{Obj}(C)$ thì

$$\mathrm{Hom}(\mathbf{1}, \underline{\mathrm{Hom}}(X, X)) \cong \mathrm{Hom}(X, X).$$

Ta định nghĩa đối định giá

$$\mathrm{coev} : \mathbf{1} \to \underline{\mathrm{Hom}}(X, X) \cong X^\vee \otimes X \overset{\psi}{\cong} X \otimes X^\vee$$

là cấu xạ tương ứng với $\mathrm{id} : X \to X$ qua song ánh trên. Định giá $\mathrm{ev} : X^\vee \otimes X \to \mathbf{1}$ là cấu xạ ứng với $\mathrm{id}_{X^\vee}$ thông qua song ánh

$$\underline{\mathrm{Hom}}(X^\vee \otimes X, \mathbf{1}) \cong \mathrm{Hom}(X^\vee, X^\vee).$$

$\square$

Một định nghĩa khác của phạm trù tensor cứng

Chứng minh.

($\Leftarrow$) Giả sử mọi vật trong C là khả đối ngẫu, khi đó ta với mọi các vật $X, Y \in \mathrm{Obj}(C)$ ta định nghĩa $\underline{\mathrm{Hom}}(X, Y) = X^\star \otimes Y$ và $\mathrm{ev}_{X,Y}$ là hợp thành

$$X^\star \otimes Y \otimes X \cong X^\star \otimes X \otimes Y \xrightarrow{\mathrm{ev}_X \otimes \mathrm{id}_Y} Y.$$

Chứng minh.

($\Leftarrow$) Giả sử mọi vật trong C là khả đối ngẫu, khi đó ta với mọi các vật $X, Y \in \mathrm{Obj}(C)$ ta định nghĩa $\underline{\mathrm{Hom}}(X, Y) = X^\star \otimes Y$ và $\mathrm{ev}_{X,Y}$ là hợp thành

$$X^\star \otimes Y \otimes X \cong X^\star \otimes X \otimes Y \overset{\mathrm{ev}_X \otimes \mathrm{id}_Y}{\rightarrow} Y.$$

Ta dễ kiểm tra định nghĩa này cho ta Hom trong của C. Đẳng cấu

$$\underline{\mathrm{Hom}}(X_1, Y_1) \otimes \underline{\mathrm{Hom}}(X_2, Y_2) \overset{\cong}{\rightarrow} \underline{\mathrm{Hom}}(X_1 \otimes X_2, Y_1 \otimes Y_2)$$

Chứng minh.

($\Leftarrow$) Giả sử mọi vật trong C là khả đối ngẫu, khi đó ta với mọi các vật $X, Y \in \mathrm{Obj}(C)$ ta định nghĩa $\underline{\mathrm{Hom}}(X, Y) = X^\star \otimes Y$ và $\mathrm{ev}_{X,Y}$ là hợp thành

$$X^\star \otimes Y \otimes X \cong X^\star \otimes X \otimes Y \overset{\mathrm{ev}_X \otimes \mathrm{id}_Y}{\to} Y.$$

Ta dễ kiểm tra định nghĩa này cho ta Hom trong của C. Đẳng cấu

$$\underline{\mathrm{Hom}}(X_1, Y_1) \otimes \underline{\mathrm{Hom}}(X_2, Y_2) \overset{\cong}{\to} \underline{\mathrm{Hom}}(X_1 \otimes X_2, Y_1 \otimes Y_2)$$

chính là

$$X_1^\vee \otimes Y_1 \otimes X_2^\vee \otimes Y_2 \cong X_1^\vee \otimes X_2^\vee \otimes Y_1 \otimes Y_2 \cong (X_1 \otimes X_2)^\vee \otimes Y_1 \otimes Y_2,$$

trong đó ta đã sử dụng đẳng cấu $(X_1 \otimes X_2)^\vee \cong X_1^\vee \otimes X_2^\vee$. $\square$

Một định nghĩa khác của phạm trù tensor cứng

Chứng minh.

($\Leftarrow$) Giả sử mọi vật trong C là khả đối ngẫu, khi đó ta với mọi các vật $X, Y \in \mathrm{Obj}(C)$ ta định nghĩa $\underline{\mathrm{Hom}}(X, Y) = X^\star \otimes Y$ và $\mathrm{ev}_{X,Y}$ là hợp thành

$$X^\star \otimes Y \otimes X \cong X^\star \otimes X \otimes Y \stackrel{\mathrm{ev}_X \otimes \mathrm{id}_Y}{\to} Y.$$

Ta dễ kiểm tra định nghĩa này cho ta Hom trong của C. Đẳng cấu

$$\underline{\mathrm{Hom}}(X_1, Y_1) \otimes \underline{\mathrm{Hom}}(X_2, Y_2) \stackrel{\cong}{\to} \underline{\mathrm{Hom}}(X_1 \otimes X_2, Y_1 \otimes Y_2)$$

chính là

$$X_1^\vee \otimes Y_1 \otimes X_2^\vee \otimes Y_2 \cong X_1^\vee \otimes X_2^\vee \otimes Y_1 \otimes Y_2 \cong (X_1 \otimes X_2)^\vee \otimes Y_1 \otimes Y_2,$$

trong đó ta đã sử dụng đẳng cấu $(X_1 \otimes X_2)^\vee \cong X_1^\vee \otimes X_2^\vee$. □

Nhận xét. Cấu xạ $(\mathrm{id} \otimes \mathrm{ev}) \circ (\delta \otimes \mathrm{id}) \circ \mathrm{coev} : \mathbf{1} \to U$ làm dãy

$$0 \to U \to \mathbf{1} \to V \to 0$$

chẻ, trong đó $\delta : U \to U \otimes U$ là cấu xạ định nghĩa vật đơn vị $\mathbf{1}$.

Bổ đề 2.7

Cho $(\mathcal{C}, \otimes)$ *là một phạm trù tensor và cho* X *là một vật trong* $\mathcal{C}$. *Điều kiện cần và đủ để* X *có đối ngẫu là tồn tại* $\underline{\mathrm{Hom}}(X, \_)$ *và cấu xạ*

$$\underline{\mathrm{Hom}}(X, \mathbf{1}) \otimes Y \to \underline{\mathrm{Hom}}(X, Y)$$

là đẳng cấu với mọi vật $Y \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C})$.

Bổ đề 2.7

Cho $(\mathcal{C}, \otimes)$ *là một phạm trù tensor và cho* X *là một vật trong* $\mathcal{C}$. *Điều kiện cần và đủ để* X *có đối ngẫu là tồn tại* $\underline{\mathrm{Hom}}(X, \_\,)$ *và cấu xạ*

$$\underline{\mathrm{Hom}}(X, \mathbf{1}) \otimes Y \to \underline{\mathrm{Hom}}(X, Y)$$

là đẳng cấu với mọi vật $Y \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C})$.

Định nghĩa 2.8

Cho C là một phạm trù tensor cứng, giả sử $X \in \mathrm{Obj}(C)$, ta định nghĩa *vết* của một cấu xạ $f : X \to X$ là hợp thành

$$\mathbf{1} \overset{\mathrm{coev}}{\to} X \otimes X^{\vee} \overset{f \otimes \mathrm{id}_{X^{\vee}}}{\to} X \otimes X^{\vee} \overset{\psi}{\to} X^{\vee} \otimes X \overset{\mathrm{ev}}{\to} \mathbf{1}.$$

Ký hiệu vết của f bởi $\mathrm{tr}(f)$ và định nghĩa *hạng* của X là $\mathrm{tr}(\mathrm{id}_X)$.

Ví dụ 3.1

Cho k là một trường, khi đó phạm trù Vect_k các không gian vector hữu hạn chiều trên k là một phạm trù tensor abel cứng với vật đơn vị $\mathbf{1} = k$. Vết của một tự đồng cấu $f : V \to V$ là

$$1 \mapsto \sum_{i=1}^{n} v_i \otimes v_i^{\vee} \mapsto \sum_{i=1}^{n} f(v_i) \otimes v_i^{\vee} \mapsto \sum_{i=1}^{n} v_i^{\vee} \otimes f(v_i) \mapsto \sum_{i=1}^{n} v_i^{\vee}(f(v_i)),$$

trong đó $v_1, ..., v_n$ là một cơ sở của V và $v_1^{\vee}, ..., v_n^{\vee}$ là cơ sở đối ngẫu.

Ví dụ 3.1

Cho k là một trường, khi đó phạm trù Vect_k các không gian vector hữu hạn chiều trên k là một phạm trù tensor abel cứng với vật đơn vị $\mathbf{1} = k$. Vết của một tự đồng cấu $f : V \to V$ là

$$1 \mapsto \sum_{i=1}^{n} v_i \otimes v_i^{\vee} \mapsto \sum_{i=1}^{n} f(v_i) \otimes v_i^{\vee} \mapsto \sum_{i=1}^{n} v_i^{\vee} \otimes f(v_i) \mapsto \sum_{i=1}^{n} v_i^{\vee}(f(v_i)),$$

trong đó $v_1, ..., v_n$ là một cơ sở của V và $v_1^{\vee}, ..., v_n^{\vee}$ là cơ sở đối ngẫu. Ta viết

$$f(v_i) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} v_j \ \forall\ i = \overline{1, n}$$

sẽ thu được $v_i^{\vee}(f(v_i)) = a_{ii}$ với mọi i. Như vậy $\mathrm{tr}(f) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$ chính là vết hiểu theo nghĩa ma trận.

Ví dụ 3.2

Cho R là một vành giao hoán có đơn vị, ký hiệu Mod_R là phạm trù các R-module hữu hạn sinh. Ta biết rằng Mod_R là một phạm trù tensor abel với $\mathrm{End}(\mathbf{1}) = R$. Tuy nhien Mod_R chưa chắc là phạm trù cứng.

Ví dụ 3.2

Cho R là một vành giao hoán có đơn vị, ký hiệu Mod_R là phạm trù các R-module hữu hạn sinh. Ta biết rằng Mod_R là một phạm trù tensor abel với $\mathrm{End}(\mathbf{1}) = R$. Tuy nhien Mod_R chưa chắc là phạm trù cứng.

Lý do. Trong Mod_R có thể có những vật không phản xạ. Ví dụ khi $R = \mathbb{Z}$ thì

$$0 = \mathrm{Hom}(\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}/2, \mathbb{Z}), \mathbb{Z}) = (\mathbb{Z}/2)^{\vee\vee} \neq \mathbb{Z}/2.$$

Hơn nữa ta cũng biết được từ định lý trước, các vật khả đối ngẫu trong Mod_R chỉ là các module xạ ảnh.

Ví dụ 3.2

Cho R là một vành giao hoán có đơn vị, ký hiệu Mod_R là phạm trù các R-module hữu hạn sinh. Ta biết rằng Mod_R là một phạm trù tensor abel với $\mathrm{End}(\mathbf{1}) = R$. Tuy nhien Mod_R chưa chắc là phạm trù cứng.

Lý do. Trong Mod_R có thể có những vật không phản xạ. Ví dụ khi $R = \mathbb{Z}$ thì

$$0 = \mathrm{Hom}(\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}/2, \mathbb{Z}), \mathbb{Z}) = (\mathbb{Z}/2)^{\vee\vee} \neq \mathbb{Z}/2.$$

Hơn nữa ta cũng biết được từ định lý trước, các vật khả đối ngẫu trong Mod_R chỉ là các module xạ ảnh.

Ví dụ 3.3

Cho R là một vành giao hoán có đơn vị, khi đó Proj_R phạm trù các module xạ ảnh hữu hạn sinh là tensor cộng tính cứng, tuy nhiên **không** phải luôn luôn abel.

Tính cứng của phạm trù Proj

Bổ đề 3.4

Cho R là một vành giao hoán có đơn vị, ký hiệu Proj_R *là phạm trù các R-module xạ ảnh hữu hạn sinh. Khi đó các khẳng định sau đúng:*

(a) $\mathrm{Hom}(P_1, Q_1) \otimes \mathrm{Hom}(P_2, Q_2) \xrightarrow{\cong} \mathrm{Hom}(P_1 \otimes P_2, Q_1 \otimes Q_2)$.

Bổ đề 3.4

Cho R là một vành giao hoán có đơn vị, ký hiệu Proj_R là phạm trù các R-module xạ ảnh hữu hạn sinh. Khi đó các khẳng định sau đúng:

(a) $\mathrm{Hom}(P_1, Q_1) \otimes \mathrm{Hom}(P_2, Q_2) \xrightarrow{\cong} \mathrm{Hom}(P_1 \otimes P_2, Q_1 \otimes Q_2)$.

(b) $P_1^\vee \otimes P_2^\vee \xrightarrow{\cong} (P_1 \otimes P_2)^\vee$.

Bổ đề 3.4

Cho R là một vành giao hoán có đơn vị, ký hiệu Proj_R là phạm trù các R-module xạ ảnh hữu hạn sinh. Khi đó các khẳng định sau đúng:

(a) $\mathrm{Hom}(P_1, Q_1) \otimes \mathrm{Hom}(P_2, Q_2) \xrightarrow{\cong} \mathrm{Hom}(P_1 \otimes P_2, Q_1 \otimes Q_2)$.

(b) $P_1^\vee \otimes P_2^\vee \xrightarrow{\cong} (P_1 \otimes P_2)^\vee$.

(c) $P_1^\vee \otimes P_2 \cong \mathrm{Hom}(P_1, P_2)$.

Trong đó P_1, P_2, Q_1, Q_2 là các module và P_1, P_2 xạ ảnh (trường hợp cuối ta chỉ cần P_1 xạ ảnh).

Chứng minh.

- (a) $\Rightarrow$ (b) nếu cho $Q_1 = Q_2 = R$.

Bổ đề 3.4

Cho R là một vành giao hoán có đơn vị, ký hiệu Proj_R là phạm trù các R-module xạ ảnh hữu hạn sinh. Khi đó các khẳng định sau đúng:

(a) $\mathrm{Hom}(P_1, Q_1) \otimes \mathrm{Hom}(P_2, Q_2) \xrightarrow{\cong} \mathrm{Hom}(P_1 \otimes P_2, Q_1 \otimes Q_2)$.

(b) $P_1^\vee \otimes P_2^\vee \xrightarrow{\cong} (P_1 \otimes P_2)^\vee$.

(c) $P_1^\vee \otimes P_2 \cong \mathrm{Hom}(P_1, P_2)$.

Trong đó P_1, P_2, Q_1, Q_2 là các module và P_1, P_2 xạ ảnh (trường hợp cuối ta chỉ cần P_1 xạ ảnh).

Chứng minh.

- (a) $\Rightarrow$ (b) nếu cho $Q_1 = Q_2 = R$.
- (c) $\Rightarrow$ (b) nếu thay thế $P_2 \mapsto P_2^\vee$ là dùng tính liên hợp của hàm tử Hom và $\otimes$.

Tính cứng của phạm trù Proj

Bổ đề 3.4

Cho R là một vành giao hoán có đơn vị, ký hiệu Proj_R *là phạm trù các R-module xạ ảnh hữu hạn sinh. Khi đó các khẳng định sau đúng:*

(a) $\mathrm{Hom}(P_1, Q_1) \otimes \mathrm{Hom}(P_2, Q_2) \xrightarrow{\cong} \mathrm{Hom}(P_1 \otimes P_2, Q_1 \otimes Q_2)$.

(b) $P_1^\vee \otimes P_2^\vee \xrightarrow{\cong} (P_1 \otimes P_2)^\vee$.

(c) $P_1^\vee \otimes P_2 \cong \mathrm{Hom}(P_1, P_2)$.

Trong đó P_1, P_2, Q_1, Q_2 là các module và P_1, P_2 xạ ảnh (trường hợp cuối ta chỉ cần P_1 xạ ảnh).

Chứng minh.

- (a) $\Rightarrow$ (b) nếu cho $Q_1 = Q_2 = R$.
- (c) $\Rightarrow$ (b) nếu thay thế $P_2 \mapsto P_2^\vee$ là dùng tính liên hợp của hàm tử Hom và $\otimes$.
- (c) đúng một cách tầm thường khi $P_1 = R$, hơn nữa lớp các module P_1 thỏa mãn (c) đóng với phép lấy tổng trực tiếp với tập chỉ số hữu hạn và hạng tử trực tiếp nên ta có điều phải chứng minh do P_1 xạ ảnh hữu hạn sinh thì P_1 là một hạng tử trực tiếp của một module tự do hạng hữu hạn.

$\square$

Bổ đề 3.5

Cho R là một vành giao hoán có đơn vị và P là một R-module xạ ảnh hữu hạn sinh. Khi đó $P^\vee$ cũng là module xạ ảnh hữu hạn sinh và P phản xạ, tức $P \cong (P^\vee)^\vee$.

Bổ đề 3.5

Cho R là một vành giao hoán có đơn vị và P là một R-module xạ ảnh hữu hạn sinh. Khi đó $P^\vee$ cũng là module xạ ảnh hữu hạn sinh và P phản xạ, tức $P \cong (P^\vee)^\vee$.

Chứng minh.

Viết $P \oplus Q = R^n$, ta có một biểu đồ giao hoán với hai hàng khớp

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & P & \longrightarrow & R^n & \longrightarrow & Q & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & P^{\vee\vee} & \longrightarrow & (R^n)^{\vee\vee} & \longrightarrow & Q^{\vee\vee} & \longrightarrow & 0. \end{array}$$

Bổ đề 3.5

Cho R là một vành giao hoán có đơn vị và P là một R-module xạ ảnh hữu hạn sinh. Khi đó $P^\vee$ cũng là module xạ ảnh hữu hạn sinh và P phản xạ, tức $P \cong (P^\vee)^\vee$.

Chứng minh.

Viết $P \oplus Q = R^n$, ta có một biểu đồ giao hoán với hai hàng khớp

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & P & \longrightarrow & R^n & \longrightarrow & Q & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & P^{\vee\vee} & \longrightarrow & (R^n)^{\vee\vee} & \longrightarrow & Q^{\vee\vee} & \longrightarrow & 0. \end{array}$$

Ta rút ra vài kết luận:

- Mũi tên giữa là đẳng cấu.

Bổ đề 3.5

Cho R là một vành giao hoán có đơn vị và P là một R-module xạ ảnh hữu hạn sinh. Khi đó $P^\vee$ cũng là module xạ ảnh hữu hạn sinh và P phản xạ, tức $P \cong (P^\vee)^\vee$.

Chứng minh.

Viết $P \oplus Q = R^n$, ta có một biểu đồ giao hoán với hai hàng khớp

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & P & \longrightarrow & R^n & \longrightarrow & Q & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & P^{\vee\vee} & \longrightarrow & (R^n)^{\vee\vee} & \longrightarrow & Q^{\vee\vee} & \longrightarrow & 0. \end{array}$$

Ta rút ra vài kết luận:

- Mũi tên giữa là đẳng cấu.
- Bằng cách săn biểu đồ ta thấy $P \to P^{\vee\vee}$ là đơn cấu.
- Do tính đối xứng nên $Q \to Q^{\vee\vee}$ cũng là đơn cấu.

Bổ đề 3.5

Cho R là một vành giao hoán có đơn vị và P là một R-module xạ ảnh hữu hạn sinh. Khi đó $P^\vee$ cũng là module xạ ảnh hữu hạn sinh và P phản xạ, tức $P \cong (P^\vee)^\vee$.

Chứng minh.

Viết $P \oplus Q = R^n$, ta có một biểu đồ giao hoán với hai hàng khớp

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & P & \longrightarrow & R^n & \longrightarrow & Q & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & P^{\vee\vee} & \longrightarrow & (R^n)^{\vee\vee} & \longrightarrow & Q^{\vee\vee} & \longrightarrow & 0. \end{array}$$

Ta rút ra vài kết luận:

- Mũi tên giữa là đẳng cấu.
- Bằng cách săn biểu đồ ta thấy $P \to P^{\vee\vee}$ là đơn cấu.
- Do tính đối xứng nên $Q \to Q^{\vee\vee}$ cũng là đơn cấu.
- Bằng cách lạm dụng ký hiệu ta có thể giả sử $P \oplus Q = P^{\vee\vee} \oplus Q^{\vee\vee} = R^n$ và $P \subset P^{\vee\vee}, Q \subset Q^{\vee\vee}$.

Bổ đề 3.5

Cho R là một vành giao hoán có đơn vị và P là một R-module xạ ảnh hữu hạn sinh. Khi đó $P^\vee$ cũng là module xạ ảnh hữu hạn sinh và P phản xạ, tức $P \cong (P^\vee)^\vee$.

Chứng minh.

Viết $P \oplus Q = R^n$, ta có một biểu đồ giao hoán với hai hàng khớp

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & P & \longrightarrow & R^n & \longrightarrow & Q & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & P^{\vee\vee} & \longrightarrow & (R^n)^{\vee\vee} & \longrightarrow & Q^{\vee\vee} & \longrightarrow & 0. \end{array}$$

Ta rút ra vài kết luận:

- Mũi tên giữa là đẳng cấu.
- Bằng cách săn biểu đồ ta thấy $P \to P^{\vee\vee}$ là đơn cấu.
- Do tính đối xứng nên $Q \to Q^{\vee\vee}$ cũng là đơn cấu.
- Bằng cách lạm dụng ký hiệu ta có thể giả sử $P \oplus Q = P^{\vee\vee} \oplus Q^{\vee\vee} = R^n$ và $P \subset P^{\vee\vee}, Q \subset Q^{\vee\vee}$.
- Lấy $x \in P^{\vee\vee}$ và viết $x = y + z$ với $y \in P \subset P^{\vee\vee}, z \in Q \subset Q^{\vee\vee}$ khi đó $z = x - y \in P^{\vee\vee} \cap Q^{\vee\vee} = \{0\}$ nên $x = y$ hay $P = P^{\vee\vee}$.

□

Ví dụ 3.6

Cho G: lược đồ nhóm affine trên một trường k, V: một k-không gian vector

$$\begin{aligned} G &: \mathbf{Alg}_k \to \mathbf{Grp},\ R \mapsto G(R), \\ V_a &: \mathbf{Alg}_k \to \mathbf{Grp},\ R \mapsto V \otimes_k R, \\ GL_V &: \mathbf{Alg}_k \to \mathbf{Grp},\ R \mapsto \mathrm{Aut}_R(V \otimes_k R). \end{aligned}$$

Ví dụ 3.6

Cho G: lược đồ nhóm affine trên một trường k, V: một k-không gian vector

$$G : \mathbf{Alg}_k \to \mathbf{Grp},\ R \mapsto G(R),$$
$$V_a : \mathbf{Alg}_k \to \mathbf{Grp},\ R \mapsto V \otimes_k R,$$
$$GL_V : \mathbf{Alg}_k \to \mathbf{Grp},\ R \mapsto \mathrm{Aut}_R(V \otimes_k R).$$

Định nghĩa $\mathrm{Rep}_k(G)$ là phạm trù

$$\text{vật} = \big\{(V,\rho) \mid \dim_k(V) < +\infty, \rho : G \to GL_V : \text{biến đổi tự nhiên}\big\}$$

Ví dụ 3.6

Cho G: lược đồ nhóm affine trên một trường k, V: một k-không gian vector

$$G : \mathbf{Alg}_k \to \mathbf{Grp},\ R \mapsto G(R),$$
$$V_a : \mathbf{Alg}_k \to \mathbf{Grp},\ R \mapsto V \otimes_k R,$$
$$GL_V : \mathbf{Alg}_k \to \mathbf{Grp},\ R \mapsto \mathrm{Aut}_R(V \otimes_k R).$$

Định nghĩa $\mathrm{Rep}_k(G)$ là phạm trù

$$\text{vật} = \left\{(V,\rho) \mid \dim_k(V) < +\infty, \rho : G \to GL_V : \text{biến đổi tự nhiên}\right\}$$

Với $(V,\rho^V), (U,\rho^U)$ là hai biểu diễn của G, một cấu xạ $\Phi : (V,\rho^V) \to (U,\rho^U)$ bao gồm một cấu xạ $\Phi \in \mathrm{Hom}(V_a, U_a)$ sao cho

$$\begin{array}{ccc} V \otimes_k R & \xrightarrow{\rho^V_R(g)} & V \otimes_k R \\ \downarrow{\scriptstyle \Phi_R} & & \downarrow{\scriptstyle \Phi_R} \\ U \otimes_k R & \xrightarrow{\rho^U_R(g)} & U \otimes_k R. \end{array}$$

với mọi $g \in G(R)$.

Ví dụ 3.7

Tích tensor. Với $(V, \rho^V), (U, \rho^U)$ là hai biểu diễn của G, ta có

$$V_a(R) \otimes_R U_a(R) \cong (V \otimes_k U)_a(R) \ \forall\ R \in \mathrm{Obj}(\mathbf{Alg}_k).$$

$G(A)$ tác động lên $V_a(R) \otimes_R U_a(R)$ theo đường chéo

$$\rho_R^{V\otimes U}(g) = \rho_R^V(g) \otimes_R \rho_R^U(g) \ \forall\ g \in G(R).$$

Ví dụ 3.7

Tích tensor. Với $(V, \rho^V), (U, \rho^U)$ là hai biểu diễn của G, ta có

$$V_a(R) \otimes_R U_a(R) \cong (V \otimes_k U)_a(R) \ \forall\ R \in \mathrm{Obj}(\mathbf{Alg}_k).$$

$G(A)$ tác động lên $V_a(R) \otimes_R U_a(R)$ theo đường chéo

$$\rho_R^{V \otimes U}(g) = \rho_R^V(g) \otimes_R \rho_R^U(g) \ \forall\ g \in G(R).$$

Đối ngẫu. Với $R \in \mathrm{Obj}(\mathbf{Alg}_k)$ ta có một đẳng cấu

$$\mathrm{Hom}_R(V_a(R), R) \cong V_a^\vee(R).$$

Định nghĩa đối ngẫu của (V, ρ) là $(V^\vee, \rho^\vee)$ trong đó

$$V^\vee(R) = \mathrm{Hom}_R(V \otimes_k R, R),$$

và

$$\begin{aligned} G(R) \times V^\vee(R) &\to V^\vee(R) \\ (g, \varphi) &\mapsto (r \mapsto \varphi(g^{-1}(r)) \end{aligned}$$

Ví dụ 3.8

Hạng. Hạng của một vật (V, ρ^V) chỉ là $\dim_k(V)$.

Ví dụ 3.8

Hạng. Hạng của một vật (V, ρ^V) chỉ là $\dim_k(V)$.
Hàm tử thớ. Hàm tử thớ của $F : \mathrm{Rep}_k(G) \to \mathrm{Vect}_k$ chỉ là hàm tử quên $(V, \rho^V) \mapsto V$.

Ví dụ 3.8

Hạng. Hạng của một vật (V, ρ^V) chỉ là $\dim_k(V)$.
Hàm tử thớ. Hàm tử thớ của $F : \mathrm{Rep}_k(G) \to \mathrm{Vect}_k$ chỉ là hàm tử quên $(V, \rho^V) \mapsto V$.
Tái xây dựng G từ hàm tử thớ. F cảm sinh ra một hàm tử

$$\begin{aligned} F_R : \mathrm{Rep}_k(G) &\to \mathrm{Mod}_R \\ (V, \rho^V) &\mapsto V \otimes_k R \end{aligned}$$

với mọi $R \in \mathrm{Obj}(\mathbf{Alg}_k)$. Theo định nghĩa, F_R là một hàm tử tensor với mọi k đại số R. Xét nhóm tự đẳng cấu:

$$\begin{aligned} \mathrm{Aut}^{\otimes}(F)(R) = \mathrm{Aut}^{\otimes}(F_R) = \{(\lambda_V) \mid \lambda_V \in \mathrm{End}_R(V \otimes_k R), \\ (\alpha_k \otimes \mathrm{id}_R) \circ \lambda_V = \lambda_V \circ (\alpha_k \otimes \mathrm{id}_R)\ \forall \alpha \in \mathrm{Hom}_G(V, U)\}. \end{aligned}$$

Ví dụ 3.8

Hạng. Hạng của một vật (V, ρ^V) chỉ là $\dim_k(V)$.
Hàm tử thớ. Hàm tử thớ của $F : \mathrm{Rep}_k(G) \to \mathrm{Vect}_k$ chỉ là hàm tử quên $(V, \rho^V) \mapsto V$.
Tái xây dựng G từ hàm tử thớ. F cảm sinh ra một hàm tử

$$\begin{aligned} F_R : \mathrm{Rep}_k(G) &\to \mathrm{Mod}_R \\ (V, \rho^V) &\mapsto V \otimes_k R \end{aligned}$$

với mọi $R \in \mathrm{Obj}(\mathbf{Alg}_k)$. Theo định nghĩa, F_R là một hàm tử tensor với mọi k đại số R. Xét nhóm tự đẳng cấu:

$$\begin{aligned} \mathrm{Aut}^{\otimes}(F)(R) = \mathrm{Aut}^{\otimes}(F_R) = \{(\lambda_V) \mid \lambda_V \in \mathrm{End}_R(V \otimes_k R), \\ (\alpha_k \otimes \mathrm{id}_R) \circ \lambda_V = \lambda_V \circ (\alpha_k \otimes \mathrm{id}_R)\ \forall \alpha \in \mathrm{Hom}_G(V, U)\}. \end{aligned}$$

Khẳng định. Biến đổi sau là đẳng cấu.

$$\begin{aligned} G(R) &\to \mathrm{Aut}^{\otimes}(F_R) \\ g &\mapsto \text{tác động của } g \text{ lên } V \otimes_k R. \end{aligned}$$

Ví dụ 3.9

Cho k là một trường và C là phạm trù các không gian vector hữu hạn chiều phân bậc theo $\mathbb{Z}/2$, tức là các vật của C là các không gian vector $V = V_0 \oplus V_1$ trong đó V_0, V_1 là các k-không gian vector hữu hạn chiều và ta phân bậc

$$|x| = \begin{cases} 0 & \text{nếu } x \in V_0 \\ 1 & \text{nếu } x \in V_1. \end{cases}$$

Ví dụ 3.9

Cho k là một trường và C là phạm trù các không gian vector hữu hạn chiều phân bậc theo $\mathbb{Z}/2$, tức là các vật của C là các không gian vector $V = V_0 \oplus V_1$ trong đó V_0, V_1 là các k-không gian vector hữu hạn chiều và ta phân bậc

$$|x| = \begin{cases} 0 & \text{nếu } x \in V_0 \\ 1 & \text{nếu } x \in V_1. \end{cases}$$

Một cấu xạ $V_0 \oplus V_1 \to W_0 \oplus W_1$ là một cặp đồng cấu tuyến tính $f_0 : V_0 \to W_0, f_1 : V_1 \to W_1$.

Ví dụ 3.9

Cho k là một trường và C là phạm trù các không gian vector hữu hạn chiều phân bậc theo $\mathbb{Z}/2$, tức là các vật của C là các không gian vector $V = V_0 \oplus V_1$ trong đó V_0, V_1 là các k-không gian vector hữu hạn chiều và ta phân bậc

$$|x| = \begin{cases} 0 & \text{nếu } x \in V_0 \\ 1 & \text{nếu } x \in V_1. \end{cases}$$

Một cấu xạ $V_0 \oplus V_1 \to W_0 \oplus W_1$ là một cặp đồng cấu tuyến tính $f_0 : V_0 \to W_0, f_1 : V_1 \to W_1$.
Tích tensor trong C được định nghĩa bởi

$$(V \otimes W)_i = \sum_{j+k=i \mod 2} V_j \otimes W_k.$$

Ví dụ 3.9

Cho k là một trường và C là phạm trù các không gian vector hữu hạn chiều phân bậc theo $\mathbb{Z}/2$, tức là các vật của C là các không gian vector $V = V_0 \oplus V_1$ trong đó V_0, V_1 là các k-không gian vector hữu hạn chiều và ta phân bậc

$$|x| = \begin{cases} 0 & \text{nếu } x \in V_0 \\ 1 & \text{nếu } x \in V_1. \end{cases}$$

Một cấu xạ $V_0 \oplus V_1 \to W_0 \oplus W_1$ là một cặp đồng cấu tuyến tính $f_0 : V_0 \to W_0, f_1 : V_1 \to W_1$.
Tích tensor trong C được định nghĩa bởi

$$(V \otimes W)_i = \sum_{j+k=i \mod 2} V_j \otimes W_k.$$

Hom trong được định nghĩa bởi

$$\underline{\mathrm{Hom}}(V, W)_i = \sum_{j+k=i \mod 2} \mathrm{Hom}(V_j, W_k).$$

Ví dụ 3.10

Ta đồng nhất trường nền k với $k \oplus 0$, khi đó vật đối ngẫu của V là $V_0^\vee \oplus V_1^\vee$.

Ví dụ 3.10

Ta đồng nhất trường nền k với $k \oplus 0$, khi đó vật đối ngẫu của V là $V_0^\vee \oplus V_1^\vee$. Gọi $v_1, ..., v_n$ và $u_1, ..., u_m$ lần lượt là hai cơ sở của V_0, V_1, khi đó đối định giá coev : $\mathbf{1} \to (V_0 \oplus V_1) \otimes (V_0 \oplus V_1)^\vee$ được định nghĩa bởi

$$1 \mapsto \sum_{i=1}^{n} v_i \otimes v_i^\vee + \sum_{i=1}^{m} u_i \otimes u_i^\vee .$$

Ví dụ 3.10

Ta đồng nhất trường nền k với $k \oplus 0$, khi đó vật đối ngẫu của V là $V_0^\vee \oplus V_1^\vee$. Gọi $v_1, ..., v_n$ và $u_1, ..., u_m$ lần lượt là hai cơ sở của V_0, V_1, khi đó đối định giá coev : $\mathbf{1} \to (V_0 \oplus V_1) \otimes (V_0 \oplus V_1)^\vee$ được định nghĩa bởi

$$1 \mapsto \sum_{i=1}^{n} v_i \otimes v_i^\vee + \sum_{i=1}^{m} u_i \otimes u_i^\vee .$$

Ta có

$$\sum_{i=1}^{n} v_i \otimes v_i^\vee \mapsto \sum_{i=0}^{n} (-1)^{0.0} v_i^\vee \otimes f_0(v_i), \ \sum_{i=1}^{m} u_i \otimes u_i^\vee \mapsto \sum_{i=0}^{m} (-1)^{1.1} u_i^\vee \otimes f_1(u_i).$$

Ví dụ 3.10

Ta đồng nhất trường nền k với $k \oplus 0$, khi đó vật đối ngẫu của V là $V_0^\vee \oplus V_1^\vee$. Gọi $v_1, ..., v_n$ và $u_1, ..., u_m$ lần lượt là hai cơ sở của V_0, V_1, khi đó đối định giá $\text{coev} : \mathbf{1} \to (V_0 \oplus V_1) \otimes (V_0 \oplus V_1)^\vee$ được định nghĩa bởi

$$1 \mapsto \sum_{i=1}^{n} v_i \otimes v_i^\vee + \sum_{i=1}^{m} u_i \otimes u_i^\vee .$$

Ta có

$$\sum_{i=1}^{n} v_i \otimes v_i^\vee \mapsto \sum_{i=0}^{n} (-1)^{0.0} v_i^\vee \otimes f_0(v_i), \ \sum_{i=1}^{m} u_i \otimes u_i^\vee \mapsto \sum_{i=0}^{m} (-1)^{1.1} u_i^\vee \otimes f_1(u_i).$$

Cuối cùng ta lấy định giá và cộng lại để suy ra

$$\text{tr}(f) = \text{tr}(f_0) - \text{tr}(f_1).$$

Nói riêng, $\text{rank}(V)$ không nhất thiết không âm, do đó không có dạng $\text{Rep}_k(G)$.

Định nghĩa 3.11

Cho $\mathcal{C}$ là một phạm trù tiền cộng tính (*pre-additive category*). Một *envelope cộng tính* của $\mathcal{C}$ là một cặp $(\mathcal{C}^{add}, \iota)$ trong đó C^{add} là một phạm trù cộng tính và $\iota : \mathcal{C} \to \mathcal{C}^{add}$ là một hàm tử trung thành, đầy đủ, tiền cộng tính sao cho với mọi phạm trù cộng tính $\mathcal{D}$ thì "hàm tử hạn chế"

$$\mathrm{Hom}_+(\mathcal{C}^{add}, \mathcal{D}) \to \mathrm{Hom}_+(\mathcal{C}, \mathcal{D}),\ F \mapsto F \circ \iota$$

là một tương đương phạm trù, trong đó Hom_+ là lớp các hàm tử cộng tính giữa các phạm trù tiền cộng tính.

Envelope cộng tính

Định nghĩa 3.11

Cho $\mathcal{C}$ là một phạm trù tiền cộng tính (*pre-additive category*). Một *envelope cộng tính* của $\mathcal{C}$ là một cặp $(\mathcal{C}^{add}, \iota)$ trong đó C^{add} là một phạm trù cộng tính và $\iota : \mathcal{C} \to \mathcal{C}^{add}$ là một hàm tử trung thành, đầy đủ, tiền cộng tính sao cho với mọi phạm trù cộng tính $\mathcal{D}$ thì "hàm tử hạn chế"

$$\mathrm{Hom}_+(\mathcal{C}^{add}, \mathcal{D}) \to \mathrm{Hom}_+(\mathcal{C}, \mathcal{D}), \ F \mapsto F \circ \iota$$

là một tương đương phạm trù, trong đó Hom_+ là lớp các hàm tử cộng tính giữa các phạm trù tiền cộng tính.

Định lí 3.12

Tồn tại envelope cộng tính $(\mathcal{C}^{add}, \iota)$ với mọi phạm trù tiền cộng tính $\mathcal{C}$. Hơn nữa nếu $\mathcal{C}$ là một phạm trù tensor thì $\mathcal{C}^{add}$ cũng là một phạm trù tensor và ι là một hàm tử tensor sao cho với mọi phạm trù tensor, cộng tính D thì

$$\mathrm{Hom}_+^{\otimes}(\mathcal{C}^{add}, \mathcal{D}) \xrightarrow{\cong} \mathrm{Hom}_+^{\otimes}(\mathcal{C}, \mathcal{D}), \ F \mapsto F \circ \iota,$$

trong đó $\mathrm{Hom}_+^{\otimes}$ là lớp các hàm tử cộng tính, tensor giữa các phạm trù tensor, abel.

Ví dụ 3.13

Cho V là một module tự do hạng hữu hạn trên một vành giao hoán k. Đặt $T^{a,b}(V) = V^{\otimes a} \otimes V^{\vee \otimes b}$, tensor thuận biến a lần và phản biến b lần. Ta có

$$\begin{aligned}\mathrm{Hom}_k(T^{a,b}(V), T^{c,d}(V)) &= \mathrm{Hom}_k(V^{\otimes a} \otimes V^{\vee \otimes b}, V^{\otimes c} \otimes V^{\vee \otimes d}) \\ &\cong (V^{\otimes a} \otimes V^{\vee \otimes b})^{\vee} \otimes V^{\otimes c} \otimes V^{\vee \otimes d} \\ &\cong V^{\otimes (b+c)} \otimes V^{\vee \otimes (a+d)} = T^{b+c,a+d}(V).\end{aligned}$$

Nói cách khác một đồng cấu $f : T^{a,b}(V) \to T^{c,d}(V)$ có thể đồng nhất với một phần tử của $T^{b+c,a+d}(V)$.

Ví dụ 3.13

Cho V là một module tự do hạng hữu hạn trên một vành giao hoán k. Đặt $T^{a,b}(V) = V^{\otimes a} \otimes V^{\vee \otimes b}$, tensor thuận biến a lần và phản biến b lần. Ta có

$$\begin{aligned}\mathrm{Hom}_k(T^{a,b}(V), T^{c,d}(V)) &= \mathrm{Hom}_k(V^{\otimes a} \otimes V^{\vee \otimes b}, V^{\otimes c} \otimes V^{\vee \otimes d}) \\ &\cong (V^{\otimes a} \otimes V^{\vee \otimes b})^{\vee} \otimes V^{\otimes c} \otimes V^{\vee \otimes d} \\ &\cong V^{\otimes (b+c)} \otimes V^{\vee \otimes (a+d)} = T^{b+c,a+d}(V).\end{aligned}$$

Nói cách khác một đồng cấu $f : T^{a,b}(V) \to T^{c,d}(V)$ có thể đồng nhất với một phần tử của $T^{b+c,a+d}(V)$.
Khi $b + c = a + d = l$ thì trong $T^{1,1}(V) \cong \mathrm{Hom}_k(V, V)$ có một phần tử đặc biệt là id, do đó $\mathrm{id}^{\otimes l} \in T^{l,l}(V)$.

Ví dụ 3.13

Cho V là một module tự do hạng hữu hạn trên một vành giao hoán k. Đặt $T^{a,b}(V) = V^{\otimes a} \otimes V^{\vee \otimes b}$, tensor thuận biến a lần và phản biến b lần. Ta có

$$\begin{aligned}\mathrm{Hom}_k(T^{a,b}(V), T^{c,d}(V)) &= \mathrm{Hom}_k(V^{\otimes a} \otimes V^{\vee \otimes b}, V^{\otimes c} \otimes V^{\vee \otimes d}) \\ &\cong (V^{\otimes a} \otimes V^{\vee \otimes b})^{\vee} \otimes V^{\otimes c} \otimes V^{\vee \otimes d} \\ &\cong V^{\otimes (b+c)} \otimes V^{\vee \otimes (a+d)} = T^{b+c,a+d}(V).\end{aligned}$$

Nói cách khác một đồng cấu $f : T^{a,b}(V) \to T^{c,d}(V)$ có thể đồng nhất với một phần tử của $T^{b+c,a+d}(V)$.
Khi $b + c = a + d = l$ thì trong $T^{1,1}(V) \cong \mathrm{Hom}_k(V, V)$ có một phần tử đặc biệt là id, do đó $\mathrm{id}^{\otimes l} \in T^{l,l}(V)$.
Cụ thể hơn, ta thấy $\mathrm{id} = \sum_{i=1}^{n} v_i \otimes v_i^{\vee}$ trong đó $v_1, ..., v_n$ là một cơ sở của V. Khi đó ta có

$$\mathrm{id}^{\otimes l} = \sum_{(i_1,\ldots,i_l) \in \{1,\ldots,n\}^l} v_{i_1} \otimes ... \otimes v_{i_l} \otimes v_{i_1}^{\vee} \otimes ... \otimes v_{i_l}^{\vee}.$$

Ví dụ 3.14

Cho nhóm đối xứng S_l tác động lên phần tử này bằng cách đảo các vị trí phản biến, tác động này cho ta một đơn ánh

$$\epsilon : S_{a+d} \hookrightarrow T^{b+c,a+d}(V) \cong \mathrm{Hom}(T^{a,b}(V), T^{c,d}(V))$$

$$\sigma \mapsto \sum v_{i_1} \otimes ... \otimes v_{i_l} \otimes v^{\vee}_{\sigma^{-1}(i_1)} \otimes ... \otimes v^{\vee}_{\sigma^{-1}(i_l)}.$$

Ví dụ 3.14

Cho nhóm đối xứng S_l tác động lên phần tử này bằng cách đảo các vị trí phản biến, tác động này cho ta một đơn ánh

$$\epsilon : S_{a+d} \hookrightarrow T^{b+c,a+d}(V) \cong \mathrm{Hom}(T^{a,b}(V), T^{c,d}(V))$$
$$\sigma \mapsto \sum v_{i_1} \otimes ... \otimes v_{i_l} \otimes v^{\vee}_{\sigma^{-1}(i_1)} \otimes ... \otimes v^{\vee}_{\sigma^{-1}(i_l)}.$$

Hợp thành của mọi hai đồng cấu như vậy
$\epsilon(\sigma) : T^{a,b}(V) \to T^{c,d}(V), \epsilon(\tau) : T^{c,d}(V) \to T^{e,f}(V)$ thỏa mãn

$$\epsilon(\sigma) \circ \epsilon(\tau) = \mathrm{rank}(V)^N \epsilon(\rho),$$

trong đó N, ρ chỉ phụ thuộc vào a, b, c, d, e, f, σ và τ.

Ví dụ 3.14

Cho nhóm đối xứng S_l tác động lên phần tử này bằng cách đảo các vị trí phản biến, tác động này cho ta một đơn ánh

$$\epsilon : S_{a+d} \hookrightarrow T^{b+c,a+d}(V) \cong \mathrm{Hom}(T^{a,b}(V), T^{c,d}(V))$$

$$\sigma \mapsto \sum v_{i_1} \otimes ... \otimes v_{i_l} \otimes v^{\vee}_{\sigma^{-1}(i_1)} \otimes ... \otimes v^{\vee}_{\sigma^{-1}(i_l)}.$$

Hợp thành của mọi hai đồng cấu như vậy
$\epsilon(\sigma) : T^{a,b}(V) \to T^{c,d}(V), \epsilon(\tau) : T^{c,d}(V) \to T^{e,f}(V)$ thỏa mãn

$$\epsilon(\sigma) \circ \epsilon(\tau) = \mathrm{rank}(V)^N \epsilon(\rho),$$

trong đó N, ρ chỉ phụ thuộc vào a, b, c, d, e, f, σ và τ.
Định nghĩa $\mathcal{C}'$ là phạm trù mà vật là các ký hiệu $T^{a,b}$ $(a, b \in \mathbb{N})$, tập hom được định nghĩa bởi

$$\mathrm{Hom}(T^{a,b}, T^{c,d}) = \begin{cases} \mathbb{Z}[t][S_{a+d}] & \text{nếu } a+d = b+c \\ 0 & \text{trường hợp khác.} \end{cases}$$

Ví dụ 3.15

Hợp thành được định nghĩa là $\mathbb{Z}[t]$-tuyến tính và trên các phần tử cơ sở thì

$$\sigma\tau = t^N \rho.$$

Ví dụ 3.15

Hợp thành được định nghĩa là $\mathbb{Z}[t]$-tuyến tính và trên các phần tử cơ sở thì

$$\sigma\tau = t^N \rho.$$

Tích tensor trong C' được định nghĩa theo cách hiển nhiên, $T^{a,b} \otimes T^{c,d} = T^{a+c,b+d}$. Đặt $T = T^{1,0}$ và định nghĩa phạm trù $\mathcal{C} = \mathcal{C}'^{add}$.

Ví dụ 3.15

Hợp thành được định nghĩa là $\mathbb{Z}[t]$-tuyến tính và trên các phần tử cơ sở thì

$$\sigma\tau = t^N \rho.$$

Tích tensor trong C' được định nghĩa theo cách hiển nhiên, $T^{a,b} \otimes T^{c,d} = T^{a+c,b+d}$. Đặt $T = T^{1,0}$ và định nghĩa phạm trù $\mathcal{C} = \mathcal{C'}^{add}$. Phạm trù $\mathcal{C}$ là một $\mathbb{Z}[t]$-phạm trù tensor abel cứng sinh bởi vật T. Để tính hạng T ta chỉ cần xem hợp thành

$$T^{0,0} \xrightarrow{\tau} T^{1,1} \xrightarrow{\mathrm{id}} T^{1,1} \xrightarrow{\sigma} T^{0,0}$$

là gì trong công thức hợp thành phổ dụng.

Ví dụ 3.15

Hợp thành được định nghĩa là $\mathbb{Z}[t]$-tuyến tính và trên các phần tử cơ sở thì

$$\sigma\tau = t^N \rho.$$

Tích tensor trong C' được định nghĩa theo cách hiển nhiên, $T^{a,b} \otimes T^{c,d} = T^{a+c,b+d}$. Đặt $T = T^{1,0}$ và định nghĩa phạm trù $\mathcal{C} = \mathcal{C}'^{add}$. Phạm trù $\mathcal{C}$ là một $\mathbb{Z}[t]$-phạm trù tensor abel cứng sinh bởi vật T. Để tính hạng T ta chỉ cần xem hợp thành

$$T^{0,0} \xrightarrow{\tau} T^{1,1} \xrightarrow{\mathrm{id}} T^{1,1} \xrightarrow{\sigma} T^{0,0}$$

là gì trong công thức hợp thành phổ dụng. Tuy nhiên ta biết rằng

$$\mathbf{1} \xrightarrow{\mathrm{coev}} V \otimes V^{\vee} \xrightarrow{\mathrm{swap}} V^{\vee} \otimes V \xrightarrow{\mathrm{ev}} \mathbf{1}$$

chính là $\mathrm{rank}(V)$. Đối chiếu

$$(\mathrm{ev} \circ \mathrm{swap} \circ \mathrm{coev} = \mathrm{rank}(V)\mathrm{id}, N = 1) \Rightarrow (\sigma \circ \mathrm{id} \circ \tau = t.\mathrm{id}, N = 1)$$

suy ra $\mathrm{rank}(T) = t$ không là số tự nhiên.

Định nghĩa 3.16

Cho $\mathcal{C}$ là một phạm trù, X một vật trong $\mathcal{C}$, một cấu xạ $e^2 = e \in \mathrm{End}_{\mathcal{C}}(X)$ được gọi là một *lũy đẳng* của $\mathcal{C}$. Một *chẻ* của e là một bộ ba $(\mathrm{Im}e, \pi_e, \iota_e)$ trong đó $\mathrm{Im}e \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C})$ và

$$\iota : \mathrm{Im}e \to X, \ \pi_e : X \to \mathrm{Im}e$$

là các cấu xạ trong $\mathcal{C}$ thỏa mãn

- $\mathrm{e} = \iota_e \circ \pi_e$,
- $\mathrm{id}_{\mathrm{Im}_e} = \pi_e \circ \iota_e$.

Chẻ của lũy đẳng và giả abel hóa

Định nghĩa 3.16

Cho $\mathcal{C}$ là một phạm trù, X một vật trong $\mathcal{C}$, một cấu xạ $e^2 = e \in \mathrm{End}_{\mathcal{C}}(X)$ được gọi là một *lũy đẳng* của $\mathcal{C}$. Một *chẻ* của e là một bộ ba $(\mathrm{Im}e, \pi_e, \iota_e)$ trong đó $\mathrm{Im}e \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C})$ và

$$\iota : \mathrm{Im}e \to X,\ \pi_e : X \to \mathrm{Im}e$$

là các cấu xạ trong $\mathcal{C}$ thỏa mãn

- $\mathrm{e} = \iota_e \circ \pi_e$,
- $\mathrm{id}_{\mathrm{Im}_e} = \pi_e \circ \iota_e$.

Định nghĩa 3.17

Một phạm trù được gọi là *Karoubi* nếu mọi lũy đẳng đều chẻ. Một *Karoubi envelope* của một phạm trù $\mathcal{C}$ là một bộ $(\mathcal{C}^{kar}, \iota)$ trong đó $\mathcal{C}^{kar}$ là Karoubi và $\iota : \mathcal{C} \to \mathcal{C}^{kar}$ là một hàm tử trung thành, đầy đủ sao cho với mọi phạm trù $\mathcal{D}$ thì "hàm tử hạn chế"

$$\mathrm{Nat}(\mathcal{C}^{kar}, \mathcal{D}) \to \mathrm{Nat}(\mathcal{C}, \mathcal{D})$$
$$F \mapsto F \circ \iota$$

là một tương đương phạm trù.

Định lí 3.18

Cho $\mathcal{C}$ là một phạm trù, khi đó tồn tại duy nhất sai khác một đẳng cấu một bộ $(\mathcal{C}^{kar}, \iota)$ là một Karoubi envelope của $\mathcal{C}$. Nếu $\mathcal{C}$ là phạm trù tensor thì $\mathcal{C}^{kar}$ cũng được trang bị cấu trúc của phạm trù tensor và ι sẽ là một hàm tử tensor sao cho với mọi phạm trù tensor Karoubi $\mathcal{D}$ thì hàm tử hạn chế

$$\begin{aligned}\mathrm{Hom}_{+}^{\otimes}(\mathcal{C}^{kar}, \mathcal{D}) &\to \mathrm{Hom}_{+}^{\otimes}(\mathcal{C}, \mathcal{D})\\ F &\mapsto F \circ \iota\\ (\eta : F \to F') &\mapsto \eta_{\iota}\end{aligned}$$

là một tương đương phạm trù. Hơn thế nữa, nếu $\mathcal{C}$ là cộng tính thì $\mathcal{C}^{kar}$ cũng là cộng tính.

Định nghĩa 3.19

Một vật X khác 0 trong một phạm trù abel $\mathcal{C}$ được gọi là *đơn abel* nếu 0 và X là hai vật con duy nhất (chính xác tới một đẳng cấu) của X. Một vật X trong $\mathcal{C}$ được gọi là *nửa đơn abel* nếu nó là tổng trực tiếp của các vật đơn abel. Phạm trù $\mathcal{C}$ được gọi là *nửa đơn abel* nếu mọi vật của nó là nửa đơn abel.

Định nghĩa 3.19

Một vật X khác 0 trong một phạm trù abel $\mathcal{C}$ được gọi là *đơn abel* nếu 0 và X là hai vật con duy nhất (chính xác tới một đẳng cấu) của X. Một vật X trong $\mathcal{C}$ được gọi là *nửa đơn abel* nếu nó là tổng trực tiếp của các vật đơn abel. Phạm trù $\mathcal{C}$ được gọi là *nửa đơn abel* nếu mọi vật của nó là nửa đơn abel.

Định nghĩa 3.20

Một phạm trù k-tuyến tính $\mathcal{C}$, với k là một trường, được gọi là *nửa đơn theo tự đồng cấu* nếu $\mathrm{End}(X)$ là k-đại số nửa đơn hữu hạn chiều với mọi vật X trong $\mathcal{C}$.

Định nghĩa 3.19

Một vật X khác 0 trong một phạm trù abel $\mathcal{C}$ được gọi là *đơn abel* nếu 0 và X là hai vật con duy nhất (chính xác tới một đẳng cấu) của X. Một vật X trong $\mathcal{C}$ được gọi là *nửa đơn abel* nếu nó là tổng trực tiếp của các vật đơn abel. Phạm trù $\mathcal{C}$ được gọi là *nửa đơn abel* nếu mọi vật của nó là nửa đơn abel.

Định nghĩa 3.20

Một phạm trù k-tuyến tính $\mathcal{C}$, với k là một trường, được gọi là *nửa đơn theo tự đồng cấu* nếu $\mathrm{End}(X)$ là k-đại số nửa đơn hữu hạn chiều với mọi vật X trong $\mathcal{C}$.

Định lí 3.21

Nếu $\mathcal{C}$ là một phạm trù k-tuyến tính, Karoubi (giả abel) và nửa đơn theo tự đồng cấu thì nó là phạm trù nửa đơn abel; nói riêng, $\mathcal{C}$ là phạm trù abel.

Ví dụ 3.22

Ký hiệu $\mathcal{C}$ là phạm trù trong ví dụ trước. Ta đổi hệ số phạm trù này lên $\mathbb{Q}(t)$, nói cách khác, ta thay các tập hom bởi $\mathrm{Hom}(T^{a,b}, T^{c,d}) \otimes_{\mathbb{Z}[t]} \mathbb{Q}(t)$. Ta có

$$\mathrm{Hom}(T^{a,b}, T^{c,d}) \otimes_{\mathbb{Z}[t]} \mathbb{Q}(t) = \mathbb{Q}(t)[S_{a+d}]$$

là đại số nửa đơn theođịnh lý Maschke.

Ví dụ 3.22

Ký hiệu $\mathcal{C}$ là phạm trù trong ví dụ trước. Ta đổi hệ số phạm trù này lên $\mathbb{Q}(t)$, nói cách khác, ta thay các tập hom bởi $\mathrm{Hom}(T^{a,b}, T^{c,d}) \otimes_{\mathbb{Z}[t]} \mathbb{Q}(t)$. Ta có

$$\mathrm{Hom}(T^{a,b}, T^{c,d}) \otimes_{\mathbb{Z}[t]} \mathbb{Q}(t) = \mathbb{Q}(t)[S_{a+d}]$$

là đại số nửa đơn theođịnh lý Maschke. Xét phạm trù $GL_t = (\mathcal{C} \otimes \mathbb{Q}(t))^{kar}$, đây là một phạm trù

- $\mathbb{Q}(t)$-tuyến tính, Karoubi,

Ví dụ 3.22

Ký hiệu $\mathcal{C}$ là phạm trù trong ví dụ trước. Ta đổi hệ số phạm trù này lên $\mathbb{Q}(t)$, nói cách khác, ta thay các tập hom bởi $\mathrm{Hom}(T^{a,b}, T^{c,d}) \otimes_{\mathbb{Z}[t]} \mathbb{Q}(t)$. Ta có

$$\mathrm{Hom}(T^{a,b}, T^{c,d}) \otimes_{\mathbb{Z}[t]} \mathbb{Q}(t) = \mathbb{Q}(t)[S_{a+d}]$$

là đại số nửa đơn theođịnh lý Maschke. Xét phạm trù $GL_t = (\mathcal{C} \otimes \mathbb{Q}(t))^{kar}$, đây là một phạm trù

- $\mathbb{Q}(t)$-tuyến tính, Karoubi,
- nửa đơn theo tự đồng cấu,

Ví dụ 3.22

Ký hiệu $\mathcal{C}$ là phạm trù trong ví dụ trước. Ta đổi hệ số phạm trù này lên $\mathbb{Q}(t)$, nói cách khác, ta thay các tập hom bởi $\mathrm{Hom}(T^{a,b}, T^{c,d}) \otimes_{\mathbb{Z}[t]} \mathbb{Q}(t)$. Ta có

$$\mathrm{Hom}(T^{a,b}, T^{c,d}) \otimes_{\mathbb{Z}[t]} \mathbb{Q}(t) = \mathbb{Q}(t)[S_{a+d}]$$

là đại số nửa đơn theođịnh lý Maschke. Xét phạm trù $GL_t = (\mathcal{C} \otimes \mathbb{Q}(t))^{kar}$, đây là một phạm trù

- $\mathbb{Q}(t)$-tuyến tính, Karoubi,
- nửa đơn theo tự đồng cấu,
- tensor cứng với $\mathrm{End}(\mathbf{1}) = \mathbb{Q}(t)$ là một trường.

Ví dụ 3.22

Ký hiệu $\mathcal{C}$ là phạm trù trong ví dụ trước. Ta đổi hệ số phạm trù này lên $\mathbb{Q}(t)$, nói cách khác, ta thay các tập hom bởi $\mathrm{Hom}(T^{a,b}, T^{c,d}) \otimes_{\mathbb{Z}[t]} \mathbb{Q}(t)$. Ta có

$$\mathrm{Hom}(T^{a,b}, T^{c,d}) \otimes_{\mathbb{Z}[t]} \mathbb{Q}(t) = \mathbb{Q}(t)[S_{a+d}]$$

là đại số nửa đơn theođịnh lý Maschke. Xét phạm trù $GL_t = (\mathcal{C} \otimes \mathbb{Q}(t))^{kar}$, đây là một phạm trù

- $\mathbb{Q}(t)$-tuyến tính, Karoubi,
- nửa đơn theo tự đồng cấu,
- tensor cứng với $\mathrm{End}(\mathbf{1}) = \mathbb{Q}(t)$ là một trường.

Do đó GL_t là abel. Tuy nhiên $\mathrm{rank}(T^{1,0}) = t \notin \mathbb{N}$ nên GL_t không có dạng $\mathrm{Rep}_k(G)$ với mọi lược đồ nhóm G. Nói cách khác, GL_t không thể được trang bị một hàm tử thớ.

Cảm ơn mọi người đã lắng nghe!

Tài liệu tham khảo

1. P. Deligne, *Catégories tannakiennes*, The Grothendieck Festschrift, Vol. II, Progr.Math., vol. 87, Birkh auser Boston, Boston, MA, 1990, pp. 111–195. MR 1106898.
2. P. Deligne and J. Milne, *Tannakian categories*. In Deligne, Pierre; Milne, James S.; Ogus, Arthur; Shih, Kuang-yen. *Hodge cycles, motives, and Shimura varieties*. Lecture Notes in Mathematics, 900, pages 101-228. Springer-Verlag, Berlin-New York, 1982.