Lý thuyết Galois vi phân II

NGUYEN Kieu Hieu

Technical University of Munich

25 Tháng tám 2021

Plan of the talk

1. Phạm trù các module vi phân
2. Mở rộng Picard-Vessiot phổ quát và nhóm Galois vi phân phổ quát
3. Về hàm tử thớ của phạm trù Diff_K
4. Ví dụ : Phạm trù các phương trình vi phân kỳ dị chính quy trên trường các chuỗi Laurent hình thức

Phạm trù các module vi phân

Phạm trù các module vi phân

- Cho K là một trường vi phân sao cho trường các hằng C của K là một trường đóng đại số có đặc số 0 và thực sự nằm trong K

Phạm trù các module vi phân

- Cho K là một trường vi phân sao cho trường các hằng C của K là một trường đóng đại số có đặc số 0 và thực sự nằm trong K
- Nhắc lại rằng một module vi phân trên K là một K - module hữu hạn sinh cùng với một toán tử vi phân ∂ mở rộng toán tử vi phân của K.

Phạm trù các module vi phân

- Cho K là một trường vi phân sao cho trường các hằng C của K là một trường đóng đại số có đặc số 0 và thực sự nằm trong K
- Nhắc lại rằng một module vi phân trên K là một K - module hữu hạn sinh cùng với một toán tử vi phân ∂ mở rộng toán tử vi phân của K.
- Một cấu xạ $\phi : (M_1, \partial_1) \longrightarrow (M_2, \partial_2)$ là một K - tuyến tính ánh xạ sao cho $\phi \circ \partial_1 = \partial_2 \circ \phi$.

Phạm trù các module vi phân

- Cho K là một trường vi phân sao cho trường các hằng C của K là một trường đóng đại số có đặc số 0 và thực sự nằm trong K
- Nhắc lại rằng một module vi phân trên K là một K - module hữu hạn sinh cùng với một toán tử vi phân ∂ mở rộng toán tử vi phân của K.
- Một cấu xạ $\phi : (M_1, \partial_1) \longrightarrow (M_2, \partial_2)$ là một K - tuyến tính ánh xạ sao cho $\phi \circ \partial_1 = \partial_2 \circ \phi$.

Định nghĩa

Phạm trù các module vi phân trên K, được ký hiệu là Diff_K, là phạm trù mà các vật bao gồm tập hợp các module vi phân trên K và các cấu xạ giữu hai vật là cấu xạ của K - module vi phân tương ứng.

Một vài xây dựng đại số quen thuộc

Một vài xây dựng đại số quen thuộc

- Tổng trực tiếp của (M_1, ∂_1) và (M_2, ∂_2) là (M_3, ∂_3) ở đây $M_3 = M_1 \oplus M_2$ và $\partial_3(m_1 \oplus m_2) = \partial_1(m_1) \oplus \partial_2(m_2)$.

Một vài xây dựng đại số quen thuộc

- Tổng trực tiếp của (M_1, ∂_1) và (M_2, ∂_2) là (M_3, ∂_3) ở đây $M_3 = M_1 \oplus M_2$ và $\partial_3(m_1 \oplus m_2) = \partial_1(m_1) \oplus \partial_2(m_2)$.
- Tích tensor của (M_1, ∂_1) và (M_2, ∂_2) là (M_3, ∂_3) ở đây $M_3 = M_1 \otimes M_2$ và $\partial_3(m_1 \otimes m_2) = \partial_1(m_1) \otimes m_2 + m_1 \otimes \partial_2(m_2)$.

Một vài xây dựng đại số quen thuộc

- Tổng trực tiếp của (M_1, ∂_1) và (M_2, ∂_2) là (M_3, ∂_3) ở đây $M_3 = M_1 \oplus M_2$ và $\partial_3(m_1 \oplus m_2) = \partial_1(m_1) \oplus \partial_2(m_2)$.
- Tích tensor của (M_1, ∂_1) và (M_2, ∂_2) là (M_3, ∂_3) ở đây $M_3 = M_1 \otimes M_2$ và $\partial_3(m_1 \otimes m_2) = \partial_1(m_1) \otimes m_2 + m_1 \otimes \partial_2(m_2)$.
- Một module con N của (M, ∂) là một K- không gian con $N \subset M$ sao cho $\partial(N) \subset N$. Khi đó ta thấy rằng $(N, \partial_{|N})$ là một module vi phân.

Một vài xây dựng đại số quen thuộc

- Tổng trực tiếp của (M_1, ∂_1) và (M_2, ∂_2) là (M_3, ∂_3) ở đây $M_3 = M_1 \oplus M_2$ và $\partial_3(m_1 \oplus m_2) = \partial_1(m_1) \oplus \partial_2(m_2)$.
- Tích tensor của (M_1, ∂_1) và (M_2, ∂_2) là (M_3, ∂_3) ở đây $M_3 = M_1 \otimes M_2$ và $\partial_3(m_1 \otimes m_2) = \partial_1(m_1) \otimes m_2 + m_1 \otimes \partial_2(m_2)$.
- Một module con N của (M, ∂) là một K- không gian con $N \subset M$ sao cho $\partial(N) \subset N$. Khi đó ta thấy rằng $(N, \partial_{|N})$ là một module vi phân.
- Giả sử rằng N là một module (vi phân) con của (M, ∂). Khi đó M/N cùng với toán tử vi phân ∂, được định nghĩa bởi công thức $\partial(m + N) = \partial(m) + N$ được gọi là module vi phân thương của N bởi M.

Một vài xây dựng đại số quen thuộc

- Tổng trực tiếp của (M_1, ∂_1) và (M_2, ∂_2) là (M_3, ∂_3) ở đây $M_3 = M_1 \oplus M_2$ và $\partial_3(m_1 \oplus m_2) = \partial_1(m_1) \oplus \partial_2(m_2)$.
- Tích tensor của (M_1, ∂_1) và (M_2, ∂_2) là (M_3, ∂_3) ở đây $M_3 = M_1 \otimes M_2$ và $\partial_3(m_1 \otimes m_2) = \partial_1(m_1) \otimes m_2 + m_1 \otimes \partial_2(m_2)$.
- Một module con N của (M, ∂) là một K- không gian con $N \subset M$ sao cho $\partial(N) \subset N$. Khi đó ta thấy rằng $(N, \partial_{|N})$ là một module vi phân.
- Giả sử rằng N là một module (vi phân) con của (M, ∂). Khi đó M/N cùng với toán tử vi phân ∂, được định nghĩa bởi công thức $\partial(m + N) = \partial(m) + N$ được gọi là module vi phân thương của N bởi M.

Một vài xây dựng đại số quen thuộc

- Cho (M_1, ∂_1) và (M_2, ∂_2) là hai module vi phân trên K, ta dùng ký hiệu $\mathrm{Hom}_\partial(M_1, M_2)$ cho C- không gian véc tơ các cấu xạ giữa module vi phân M_1 và M_2.

Một vài xây dựng đại số quen thuộc

- Cho (M_1, ∂_1) và (M_2, ∂_2) là hai module vi phân trên K, ta dùng ký hiệu $\mathrm{Hom}_\partial(M_1, M_2)$ cho C- không gian véc tơ các cấu xạ giữa module vi phân M_1 và M_2. Lưu ý rằng $\mathrm{Hom}_\partial(M_1, M_2)$ không phải là một module vi phân.

Một vài xây dựng đại số quen thuộc

- Cho (M_1, ∂_1) và (M_2, ∂_2) là hai module vi phân trên K, ta dùng ký hiệu $\mathrm{Hom}_\partial(M_1, M_2)$ cho C- không gian véc tơ các cấu xạ giữa module vi phân M_1 và M_2. Lưu ý rằng $\mathrm{Hom}_\partial(M_1, M_2)$ không phải là một module vi phân.
- Cho (M_1, ∂_1) và (M_2, ∂_2) là hai module vi phân trên K, khi đó internal Hom của chúng, ký hiệu bởi $\underline{\mathrm{Hom}}((M_1, \partial_1), (M_2, \partial_2))$, được định nghĩa là K-không gian véc tơ $\mathrm{Hom}_K(M_1, M_2)$ cùng với toán tử vi phân ∂ được cho bởi công thức $(\partial\ell)(m_1) = \ell(\partial_1 m_1) - \partial_2(\ell(m_1))$.

Một vài xây dựng đại số quen thuộc

- Cho (M_1, ∂_1) và (M_2, ∂_2) là hai module vi phân trên K, ta dùng ký hiệu $\mathrm{Hom}_\partial(M_1, M_2)$ cho C- không gian véc tơ các cấu xạ giữa module vi phân M_1 và M_2. Lưu ý rằng $\mathrm{Hom}_\partial(M_1, M_2)$ không phải là một module vi phân.
- Cho (M_1, ∂_1) và (M_2, ∂_2) là hai module vi phân trên K, khi đó internal Hom của chúng, ký hiệu bởi $\underline{\mathrm{Hom}}((M_1, \partial_1), (M_2, \partial_2))$, được định nghĩa là K-không gian véc tơ $\mathrm{Hom}_K(M_1, M_2)$ cùng với toán tử vi phân ∂ được cho bởi công thức $(\partial\ell)(m_1) = \ell(\partial_1 m_1) - \partial_2(\ell(m_1))$.

  Lưu ý rằng ta có hệ thức
  $\mathrm{Hom}_\partial(M_1, M_2) = \{\ell \in \underline{\mathrm{Hom}}((M_1, \partial_1), (M_2, \partial_2)) | \partial\ell = 0\}$.

Một vài xây dựng đại số quen thuộc

- Cho (M_1, ∂_1) và (M_2, ∂_2) là hai module vi phân trên K, ta dùng ký hiệu $\mathrm{Hom}_\partial(M_1, M_2)$ cho C- không gian véc tơ các cấu xạ giữa module vi phân M_1 và M_2. Lưu ý rằng $\mathrm{Hom}_\partial(M_1, M_2)$ không phải là một module vi phân.

- Cho (M_1, ∂_1) và (M_2, ∂_2) là hai module vi phân trên K, khi đó internal Hom của chúng, ký hiệu bởi $\underline{\mathrm{Hom}}((M_1, \partial_1), (M_2, \partial_2))$, được định nghĩa là K-không gian véc tơ $\mathrm{Hom}_K(M_1, M_2)$ cùng với toán tử vi phân ∂ được cho bởi công thức $(\partial \ell)(m_1) = \ell(\partial_1 m_1) - \partial_2(\ell(m_1))$.

  Lưu ý rằng ta có hệ thức
  $\mathrm{Hom}_\partial(M_1, M_2) = \{\ell \in \underline{\mathrm{Hom}}((M_1, \partial_1), (M_2, \partial_2)) | \partial\ell = 0\}$.

- Module vi phân 1 chiều tầm thường trên K được ký hiệu là 1_K. Một trường hợp đặc biệt của internal Hom là module vi phân đối ngẫu M^* của M, được xác đinh bởi công thức $M^* = \mathrm{Hom}_K(M, 1_K)$.

Sơ lược về mối liên hệ với lý thuyết Tanaka và hàm tử thớ

Nhận xét

Chúng ta có thể kiểm tra rằng $(M^*)^* \simeq M$ và $\mathrm{End}(1_K) = C$. Hơn nữa, nhờ vào đẳng thức $\mathrm{Hom}_K(T \otimes X, Y) \simeq \mathrm{Hom}_K(T, \mathrm{Hom}(X, Y))$, chúng ta có thể kiểm tra rằng đẳng thức $\mathrm{Hom}_\partial(T \otimes X, Y) \simeq \mathrm{Hom}_\partial(T, \underline{\mathrm{Hom}}(X, Y))$ là đúng.

Sơ lược về mối liên hệ với lý thuyết Tanaka và hàm tử thớ

Nhận xét

Chúng ta có thể kiểm tra rằng $(M^*)^* \simeq M$ và $\mathrm{End}(1_K) = C$. Hơn nữa, nhờ vào đẳng thức $\mathrm{Hom}_K(T \otimes X, Y) \simeq \mathrm{Hom}_K(T, \mathrm{Hom}(X, Y))$, chúng ta có thể kiểm tra rằng đẳng thức $\mathrm{Hom}_\partial(T \otimes X, Y) \simeq \mathrm{Hom}_\partial(T, \underline{\mathrm{Hom}}(X, Y))$ là đúng.

- Dựa vào những tính chất cơ bản ở trên, chúng ta thấy rằng phạm trù Diff_K thỏa mãn hầu hết các tính chất của một phạm trù Tanaka trung tính trên trường C. Chỉ có duy nhất một tính chất không hiển nhiên, đó là sự tồn tại của hàm tử thớ $\omega : \mathrm{Diff}_K \longrightarrow \mathrm{Vect}_C$.

Sơ lược về mối liên hệ với lý thuyết Tanaka và hàm tử thớ

Nhận xét

Chúng ta có thể kiểm tra rằng $(M^*)^* \simeq M$ và $\mathrm{End}(1_K) = C$. Hơn nữa, nhờ vào đẳng thức $\mathrm{Hom}_K(T \otimes X, Y) \simeq \mathrm{Hom}_K(T, \mathrm{Hom}(X, Y))$, chúng ta có thể kiểm tra rằng đẳng thức $\mathrm{Hom}_\partial(T \otimes X, Y) \simeq \mathrm{Hom}_\partial(T, \underline{\mathrm{Hom}}(X, Y))$ là đúng.

- Dựa vào những tính chất cơ bản ở trên, chúng ta thấy rằng phạm trù Diff_K thỏa mãn hầu hết các tính chất của một phạm trù Tanaka trung tính trên trường C. Chỉ có duy nhất một tính chất không hiển nhiên, đó là sự tồn tại của hàm tử thớ $\omega : \mathrm{Diff}_K \longrightarrow \mathrm{Vect}_C$.
- Một khi chúng ta có trong tay lý thuyết Picard-Vessiot, chúng ta có thể xây dựng hàm tử thớ bằng cách gán cho một module vi phân không gian nghiệm trong mở rộng Picard-Vessiot của nó.

Mở rộng Picard-Vessiot phổ quát

Mở rộng Picard-Vessiot phổ quát

- Tổng quát hơn ta quan tâm $\mathcal{C}$ một phạm trù con đầy của phạm trù Diff_K đồng thời đóng với các phép toán đại số (lấy nhân, lấy đối nhân, đối ngẫu, tổng trực tiếp và tích tensor).

Mở rộng Picard-Vessiot phổ quát

- Tổng quát hơn ta quan tâm $\mathcal{C}$ một phạm trù con đầy của phạm trù Diff_K đồng thời đóng với các phép toán đại số (lấy nhân, lấy đối nhân, đối ngẫu, tổng trực tiếp và tích tensor). Nếu Diff_Klà một phạm trù Tanaka trung tính thì ta sẽ suy ra được $\mathcal{C}$ cũng là một phạm trù Tanaka trung tính và do đó tương đương với phạm trù biểu diễn hữu hạn của một nhóm đại số affine trên C.

Mở rộng Picard-Vessiot phổ quát

- Tổng quát hơn ta quan tâm $\mathcal{C}$ một phạm trù con đầy của phạm trù Diff_K đồng thời đóng với các phép toán đại số (lấy nhân, lấy đối nhân, đối ngẫu, tổng trực tiếp và tích tensor). Nếu Diff_K là một phạm trù Tanaka trung tính thì ta sẽ suy ra được $\mathcal{C}$ cũng là một phạm trù Tanaka trung tính và do đó tương đương với phạm trù biểu diễn hữu hạn của một nhóm đại số affine trên C.
- Một câu hỏi quan trọng nữa là tìm hiểu thêm các thông tin về lược đồ nhóm affine G gắn với phạm trù Diff_K, hay tổng quát hơn là gắn với phạm trù $\mathcal{C}$.

Mở rộng Picard-Vessiot phổ quát

- Tổng quát hơn ta quan tâm $\mathcal{C}$ một phạm trù con đầy của phạm trù Diff_K đồng thời đóng với các phép toán đại số (lấy nhân, lấy đối nhân, đối ngẫu, tổng trực tiếp và tích tensor). Nếu Diff_Klà một phạm trù Tanaka trung tính thì ta sẽ suy ra được $\mathcal{C}$ cũng là một phạm trù Tanaka trung tính và do đó tương đương với phạm trù biểu diễn hữu hạn của một nhóm đại số affine trên C.
- Một câu hỏi quan trọng nữa là tìm hiểu thêm các thông tin về lược đồ nhóm affine G gắn với phạm trù Diff_K, hay tổng quát hơn là gắn với phạm trù $\mathcal{C}$.
- Tiếp theo, ta sẽ nghiên cứu mở rộng Picard-Vessiot phổ quát cho phạm trù $\mathcal{C}$.

Mở rộng Picard-Vessiot phổ quát

- Tổng quát hơn ta quan tâm $\mathcal{C}$ một phạm trù con đầy của phạm trù Diff_K đồng thời đóng với các phép toán đại số (lấy nhân, lấy đối nhân, đối ngẫu, tổng trực tiếp và tích tensor). Nếu Diff_Klà một phạm trù Tanaka trung tính thì ta sẽ suy ra được $\mathcal{C}$ cũng là một phạm trù Tanaka trung tính và do đó tương đương với phạm trù biểu diễn hữu hạn của một nhóm đại số affine trên C.
- Một câu hỏi quan trọng nữa là tìm hiểu thêm các thông tin về lược đồ nhóm affine G gắn với phạm trù Diff_K, hay tổng quát hơn là gắn với phạm trù $\mathcal{C}$.
- Tiếp theo, ta sẽ nghiên cứu mở rộng Picard-Vessiot phổ quát cho phạm trù $\mathcal{C}$.

Mở rộng Picard-Vessiot phổ quát

Định nghĩa

Mở rộng Picard-Vessiot phổ quát cho phạm trù $\mathcal{C}$ là một vành Univ R thỏa mãn các tính chất sau:

1. Univ R là một K- đại số và có một phép vi phân $r \longmapsto \partial r$ trên Univ R, mở rộng phép vi phân trên K.
2. Univ R là một đại số vi phân đơn, cụ thể hơn thì nó chỉ có hai ideal vi phân là $\{0\}$ và chính nó.
3. Với mọi hệ phương trình vi phân có dạng $\partial y = Ay$ thuộc vào phạm trù $\mathcal{C}$, tồn tại một ma trận cơ bản F của phương trình đó với hệ số trong Univ R.
4. R như một K-đại số thì được sinh bởi những hệ số của ma trận cơ bản F cùng với $\det(F)^{-1}$, ở đây ta lấy tất cả F tương ứng với tất cả các phương trình trong $\mathcal{C}$.

Mở rộng Picard-Vessiot phổ quát

Mệnh đề

Nếu phạm trù $\mathcal{C}$ thỏa mãn những giả định nêu ra ở đầu phần này thì tồn tại mở rộng Picard-Vessiot phổ quát cho phạm trù $\mathcal{C}$.

Mở rộng Picard-Vessiot phổ quát

Mệnh đề

Nếu phạm trù $\mathcal{C}$ thỏa mãn những giả định nêu ra ở đầu phần này thì tồn tại mở rộng Picard-Vessiot phổ quát cho phạm trù $\mathcal{C}$.

Chứng minh :

Mở rộng Picard-Vessiot phổ quát

Mệnh đề

Nếu phạm trù $\mathcal{C}$ thỏa mãn những giả định nêu ra ở đầu phần này thì tồn tại mở rộng Picard-Vessiot phổ quát cho phạm trù $\mathcal{C}$.

Chứng minh : Như ta đã biết, nếu M là một module vi phân trên K thì ta có thể xây dựng một mở rộng Picard- Vessiot R_M ứng với M. Ta sẽ chứng minh rằng mở rộng Picard-Vessiot phổ quát là giới hạn trực tiếp của các mở rộng Picard- Vessiot R_M khi cho M biến thiên trong phạm trù $\mathcal{C}$.

Mở rộng Picard-Vessiot phổ quát

Mệnh đề

Nếu phạm trù $\mathcal{C}$ thỏa mãn những giả định nêu ra ở đầu phần này thì tồn tại mở rộng Picard-Vessiot phổ quát cho phạm trù $\mathcal{C}$.

Chứng minh : Như ta đã biết, nếu M là một module vi phân trên K thì ta có thể xây dựng một mở rộng Picard- Vessiot R_M ứng với M. Ta sẽ chứng minh rằng mở rộng Picard-Vessiot phổ quát là giới hạn trực tiếp của các mở rộng Picard- Vessiot R_M khi cho M biến thiên trong phạm trù $\mathcal{C}$. Vì vậy, trước hết ta phải chỉ ra rằng từ một cấu xạ vi phân $M \longrightarrow N$, ta phải có một cấu xạ vi phân tương ứng $R_M \longrightarrow R_N$.

Mở rộng Picard-Vessiot phổ quát

Mệnh đề

Nếu phạm trù $\mathcal{C}$ thỏa mãn những giả định nêu ra ở đầu phần này thì tồn tại mở rộng Picard-Vessiot phổ quát cho phạm trù $\mathcal{C}$.

Chứng minh : Như ta đã biết, nếu M là một module vi phân trên K thì ta có thể xây dựng một mở rộng Picard- Vessiot R_M ứng với M. Ta sẽ chứng minh rằng mở rộng Picard-Vessiot phổ quát là giới hạn trực tiếp của các mở rộng Picard- Vessiot R_M khi cho M biến thiên trong phạm trù $\mathcal{C}$. Vì vậy, trước hết ta phải chỉ ra rằng từ một cấu xạ vi phân $M \longrightarrow N$, ta phải có một cấu xạ vi phân tương ứng $R_M \longrightarrow R_N$.

Nếu hợp $f : M \longrightarrow N$ là một cấu xạ vi phân bất kỳ, ta luôn tách f thành hợp của một cấu xạ toàn ánh và một cấu xạ đơn ánh và do đó ta chỉ cần xét các trường hợp riêng f là đơn ánh hoặc toàn ánh.

Mở rộng Picard-Vessiot phổ quát

Trước tiên, giả sử rằng cấu xạ vi phân $f : M \longrightarrow N$ là đơn ánh. Khi đó ta có thể chọn một cơ sở $(e_1, \cdots, e_{k_n})$ của K- không gian véc tơ N sao cho $(e_1, \cdots, e_{k_m})$ là một cơ sở của không gian con $f(M)$. Nhắc lại rằng phương trình vi phân ứng với module vi phân M có dạng $\partial y = A_M y$, ở đây ma trận $A_M = (a_{i,j})$ được xác định bởi công thức $\partial e_i = -\sum_j a_{j,i} e_j$.

Điều tương tự cũng đúng cho ma trận A_N. Vì vậy ta thấy rằng ma trận $A_N = \begin{pmatrix} A'_M & * \\ 0 & * \end{pmatrix}$. Ở đây, A'_M là ma trận tương ứng với module vi phân $f(M)$ và vì thế là tương đương với A_M. Từ cách xây dựng mở rộng Picard-Vessiot ta thấy ngay rằng có một cấu xạ vi phân tự nhiên $R_M \longrightarrow R_N$.

Mở rộng Picard-Vessiot phổ quát

Trước tiên, giả sử rằng cấu xạ vi phân $f : M \longrightarrow N$ là đơn ánh. Khi đó ta có thể chọn một cơ sở $(e_1, \cdots, e_{k_n})$ của K- không gian véc tơ N sao cho $(e_1, \cdots, e_{k_m})$ là một cơ sở của không gian con $f(M)$. Nhắc lại rằng phương trình vi phân ứng với module vi phân M có dạng $\partial y = A_M y$, ở đây ma trận $A_M = (a_{i,j})$ được xác định bởi công thức $\partial e_i = -\sum_j a_{j,i} e_j$.

Điều tương tự cũng đúng cho ma trận A_N. Vì vậy ta thấy rằng ma trận $A_N = \begin{pmatrix} A'_M & * \\ 0 & * \end{pmatrix}$. Ở đây, A'_M là ma trận tương ứng với module vi phân $f(M)$ và vì thế là tương đương với A_M. Từ cách xây dựng mở rộng Picard-Vessiot ta thấy ngay rằng có một cấu xạ vi phân tự nhiên $R_M \longrightarrow R_N$.

Trường hợp cấu xạ $f : M \longrightarrow N$ là toàn ánh, bằng cách tương tự chúng ta thấy rằng $A_M = \begin{pmatrix} * & * \\ 0 & A_N \end{pmatrix}$ và do đó cũng có một cấu xạ vi phân tự nhiên $R_M \longrightarrow R_N$.

Mở rộng Picard-Vessiot phổ quát

Mở rộng Picard-Vessiot phổ quát

Bây giờ, khi đã xây dựng được các cấu xạ vi phân $R_M \longrightarrow R_N$, ta có thể định nghĩa một vành như sau

$$\mathrm{Univ}\, R := \varinjlim_{M \in \mathcal{C}} R_M$$

giới hạn trực tiếp của các mở rộng Picard-Vessiot ứng với các module vi phân trong phạm trù $\mathcal{C}$.

Mở rộng Picard-Vessiot phổ quát

Bây giờ, khi đã xây dựng được các cấu xạ vi phân $R_M \longrightarrow R_N$, ta có thể định nghĩa một vành như sau

$$\mathrm{Univ}\, R := \varinjlim_{M \in \mathcal{C}} R_M$$

giới hạn trực tiếp của các mở rộng Picard-Vessiot ứng với các module vi phân trong phạm trù $\mathcal{C}$.

Ta trang bị toán tử vi phân ∂ cho $\mathrm{Univ}\, R$ từ các toán tử vi phân của R_M. Cụ thể hơn nếu $x \in \mathrm{Univ}\, R$ thì sẽ tồn tại một module vi phân M sao cho $x \in R_M$. Khi đó $\partial(x) := \partial_M(x)$.

Mở rộng Picard-Vessiot phổ quát

Bây giờ, khi đã xây dựng được các cấu xạ vi phân $R_M \longrightarrow R_N$, ta có thể định nghĩa một vành như sau

$$\mathrm{Univ}\, R := \varinjlim_{M \in \mathcal{C}} R_M$$

giới hạn trực tiếp của các mở rộng Picard-Vessiot ứng với các module vi phân trong phạm trù $\mathcal{C}$.

Ta trang bị toán tử vi phân ∂ cho $\mathrm{Univ}\, R$ từ các toán tử vi phân của R_M. Cụ thể hơn nếu $x \in \mathrm{Univ}\, R$ thì sẽ tồn tại một module vi phân M sao cho $x \in R_M$. Khi đó $\partial(x) := \partial_M(x)$. Không khó khăn để ta thấy rằng định nghĩa vừa rồi cho ta một toán tử vi phân trên $\mathrm{Univ}\, R$ và toán tử này là mở rộng của toán tử vi phân của các R_M. Từ các tính chất của các mở rộng Picard-Vessiot R_M, ta có thể thấy rằng vành $\mathrm{Univ}\, R$ thỏa mãn các tính chất 1,3,4 của định nghĩa một mở rộng Picard-Vessiot phổ quát.

Mở rộng Picard-Vessiot phổ quát

Bây giờ, khi đã xây dựng được các cấu xạ vi phân $R_M \longrightarrow R_N$, ta có thể định nghĩa một vành như sau

$$\mathrm{Univ}\, R := \varinjlim_{M \in \mathcal{C}} R_M$$

giới hạn trực tiếp của các mở rộng Picard-Vessiot ứng với các module vi phân trong phạm trù $\mathcal{C}$.

Ta trang bị toán tử vi phân ∂ cho $\mathrm{Univ}\, R$ từ các toán tử vi phân của R_M. Cụ thể hơn nếu $x \in \mathrm{Univ}\, R$ thì sẽ tồn tại một module vi phân M sao cho $x \in R_M$. Khi đó $\partial(x) := \partial_M(x)$. Không khó khăn để ta thấy rằng định nghĩa vừa rồi cho ta một toán tử vi phân trên $\mathrm{Univ}\, R$ và toán tử này là mở rộng của toán tử vi phân của các R_M. Từ các tính chất của các mở rộng Picard-Vessiot R_M, ta có thể thấy rằng vành $\mathrm{Univ}\, R$ thỏa mãn các tính chất 1,3,4 của định nghĩa một mở rộng Picard-Vessiot phổ quát. Ta không trình bày lập luận $\mathrm{Univ}\, R$ thỏa mãn tính chất 2 vì lập luận đó không liên quan trực tiếp đến chủ đề chính của workshop.

Nhóm Galois vi phân phổ quát

Định nghĩa

Chúng ta định nghĩa nhóm Galois vi phân phổ quát của $\mathcal{C}$, và ký hiệu là $\mathrm{Univ}\, G$ là nhóm các tự đẳng cấu K- tuyến tính của $\mathrm{Univ}\, R$ mà giao hoán với phép lấy vi phân ∂ của $\mathrm{Univ}\, R$.

Nhóm Galois vi phân phổ quát

Định nghĩa

Chúng ta định nghĩa nhóm Galois vi phân phổ quát của $\mathcal{C}$, và ký hiệu là $\mathrm{Univ}\, G$ là nhóm các tự đẳng cấu K- tuyến tính của $\mathrm{Univ}\, R$ mà giao hoán với phép lấy vi phân ∂ của $\mathrm{Univ}\, R$.

Chúng ta sẽ tiếp cận nhóm $\mathrm{Univ}\, G$ theo quan điểm lược đồ nhóm affine. Ta sẽ xây dựng một hàm tử $\mathcal{F}$ đi từ phạm trù các $C-$ đại số đến phạm trù các nhóm sao cho $\mathcal{F}(C) = \mathrm{Univ}\, G$.

Nhóm Galois vi phân phổ quát

Định nghĩa

Chúng ta định nghĩa nhóm Galois vi phân phổ quát của $\mathcal{C}$, và ký hiệu là Univ G là nhóm các tự đẳng cấu K- tuyến tính của Univ R mà giao hoán với phép lấy vi phân ∂ của Univ R.

Chúng ta sẽ tiếp cận nhóm Univ G theo quan điểm lược đồ nhóm affine. Ta sẽ xây dựng một hàm tử $\mathcal{F}$ đi từ phạm trù các $C-$ đại số đến phạm trù các nhóm sao cho $\mathcal{F}(C) = \text{Univ } G$.

Cụ thể hơn, với mọi C- đại số giao hoán A, chúng ta xét $A \otimes_C K$ đại số $A \otimes_C \text{Univ } R$. Chúng ta có duy nhất một cách mở rộng phép vi phân trên Univ R thành một phép vi phân A- tuyến tính trên $A \otimes_C \text{Univ } R$. Bây giờ ta định nghĩa $\mathcal{F}(A)$ là nhóm các tự đẳng cấu $A \otimes_C K$- tuyến tính của $A \otimes_C \text{Univ } R$ mà giao hoán với phép vi phân của $A \otimes_C \text{Univ } R$.

Nhóm Galois vi phân phổ quát

Nhắc lại là nhóm Galois vi phân G_M của module vi phân M là một nhóm đại số affine và hàm tử điểm tương ứng được xây dựng đúng như ở trên, chỉ thay mở rộng Picard-Vessiot phổ quát bởi mở rộng Picard-Vessiot R_M của M.

Nhóm Galois vi phân phổ quát

Nhắc lại là nhóm Galois vi phân G_M của module vi phân M là một nhóm đại số affine và hàm tử điểm tương ứng được xây dựng đúng như ở trên, chỉ thay mở rộng Picard-Vessiot phổ quát bởi mở rộng Picard-Vessiot R_M của M.

Giả sử σ là một phần tử của Univ G. Ta xét $\sigma(R_M)$ với R là một module vi phân trong phạm trù $\mathcal{C}$. Dễ thấy rằng $\sigma(R_M)$ cũng là một mở rộng Picard-Vessiot cho một module vi phân M' đẳng cấu với M. Từ cách xây dựng Univ R là giới hạn trực tiếp của các mở rộng Picard-Vessiot, ta thấy rằng $R_M = \sigma(R_M)$ và do đó $\sigma_{|R_M}$ là một phần tử của nhóm Galois vi phân G_M. Nói cách khác nhóm Univ G là giới hạn xạ ảnh của các nhóm Galois vi phân Univ $G = \varprojlim_{M \in \mathcal{C}} G_M$.

Về hàm tử thớ của phạm trù Diff_K

Về hàm tử thớ của phạm trù Diff_K

Xét M một module vi phân bất kỳ và phương trình vi phân gắn với một cơ sở $(e_1, \cdots, e_{k_M})$ của M có dạng $\partial y = Ay$. Vì $\mathrm{Univ}\, R$ là mở rộng Picard-Vessiot phổ quát nên ta có thể tìm một ma trận $F \in GL_{k_M}(\mathrm{Univ}\, R)$ sao cho $\partial F = AF$. Nói cách khác không gian nghiệm của $\mathrm{Univ}\, R \otimes_K M$ là một C-không gian véc tơ có chiều k_M.

Về hàm tử thớ của phạm trù Diff_K

Xét M một module vi phân bất kỳ và phương trình vi phân gắn với một cơ sở $(e_1, \cdots, e_{k_M})$ của M có dạng $\partial y = Ay$. Vì $\mathrm{Univ}\, R$ là mở rộng Picard-Vessiot phổ quát nên ta có thể tìm một ma trận $F \in GL_{k_M}(\mathrm{Univ}\, R)$ sao cho $\partial F = AF$. Nói cách khác không gian nghiệm của $\mathrm{Univ}\, R \otimes_K M$ là một C-không gian véc tơ có chiều k_M.

Định nghĩa

Ta định nghĩa hàm tử ω như sau :

$$\omega(M) := \ker(\partial, \mathrm{Univ}\, R \otimes_K M)$$

ở đây M là một module vi phân trong phạm trù $\mathcal{C}$.

Về hàm tử thớ của phạm trù Diff_K

Xét M một module vi phân bất kỳ và phương trình vi phân gắn với một cơ sở $(e_1, \cdots, e_{k_M})$ của M có dạng $\partial y = Ay$. Vì Univ R là mở rộng Picard-Vessiot phổ quát nên ta có thể tìm một ma trận $F \in GL_{k_M}(\mathrm{Univ}\, R)$ sao cho $\partial F = AF$. Nói cách khác không gian nghiệm của $\mathrm{Univ}\, R \otimes_K M$ là một C-không gian véc tơ có chiều k_M.

Định nghĩa

Ta định nghĩa hàm tử ω như sau :

$$\omega(M) := \ker(\partial, \mathrm{Univ}\, R \otimes_K M)$$

ở đây M là một module vi phân trong phạm trù $\mathcal{C}$.

Ngoài ra, nếu ta có một cấu xạ vi phân $f : M \longrightarrow N$ thì ta cũng có một cấu xạ vi phân $f_{\mathrm{Univ}} : \mathrm{Univ}\, R \otimes_K M \longrightarrow \mathrm{Univ}\, R \otimes_K N$ và cấu xạ này cảm sinh một cấu xạ giữa các không gian nghiệm $f_\partial : \omega(M) \longrightarrow \omega(N)$.

Về hàm tử thớ

Mệnh đề

Hàm tử ω là một hàm tử thớ nhận giá trị trong Vect_C. Cụ thể hơn, ω là C-tuyến tính, trung thành, khớp và giao hoán với tích tensor.

Về hàm tử thớ

Mệnh đề

Hàm tử ω là một hàm tử thớ nhận giá trị trong Vect_C. Cụ thể hơn, ω là C-tuyến tính, trung thành, khớp và giao hoán với tích tensor.

Chứng minh

Về hàm tử thớ

Mệnh đề

Hàm tử ω là một hàm tử thớ nhận giá trị trong Vect_C. Cụ thể hơn, ω là C-tuyến tính, trung thành, khớp và giao hoán với tích tensor.

Chứng minh Nhận xét rằng $\omega(M \oplus N) = \omega(M) \oplus \omega(N)$, từ đó ta có thể kiểm tra rằng ω là C-tuyến tính. Ngoài ra, dựa vào số chiều ta cũng thấy rằng $\omega(M \otimes N) \simeq \omega(M) \otimes \omega(N)$.

Về hàm tử thớ

Mệnh đề

Hàm tử ω là một hàm tử thớ nhận giá trị trong Vect_C. Cụ thể hơn, ω là C-tuyến tính, trung thành, khớp và giao hoán với tích tensor.

Chứng minh Nhận xét rằng $\omega(M \oplus N) = \omega(M) \oplus \omega(N)$, từ đó ta có thể kiểm tra rằng ω là C-tuyến tính. Ngoài ra, dựa vào số chiều ta cũng thấy rằng $\omega(M \otimes N) \simeq \omega(M) \otimes \omega(N)$.

Muốn kiểm tra rằng ω là trung thành thì ta phải chứng ming rằng nếu có hai cấu xạ vi phân $f, g : M \longrightarrow N$ sao cho $f_\partial = g_\partial$ thì $f = g$. Thật vậy, vì $\mathrm{Univ}\, R$ là mở rộng Picard-Vessiot phổ quát nên phương trình vi phân ứng với module vi phân M có đủ nghiệm với hệ số trong $\mathrm{Univ}\, R$. Do đó ta có thể chọn một $\mathrm{Univ}\, R$-cơ sở $(e_1, \cdots, e_{k_M})$ của $\mathrm{Univ}\, R \otimes_K M$ sao cho $\partial e_i = 0$. Nói cách khác $(e_1, \cdots, e_{k_M})$ là một C cơ sở của $\omega(M)$. Điều kiện $f_\partial = g_\partial$ nói rằng $f_{\mathrm{Univ}\, R}(e_i) = g_{\mathrm{Univ}\, R}(e_i)$ với mọi i, do đó ta thấy rằng $f = g$.

Về hàm tử thớ

Về hàm tử thớ

Bây giờ ta sẽ kiểm tra tính khớp của hàm tử ω. Xét một dãy khớp ngắn các module vi phân

$$0 \longrightarrow M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} P \longrightarrow 0.$$

Về hàm tử thớ

Bây giờ ta sẽ kiểm tra tính khớp của hàm tử ω. Xét một dãy khớp ngắn các module vi phân

$$0 \longrightarrow M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} P \longrightarrow 0.$$

Bằng cách lấy không gian nghiệm của phương trình vi phân, ta có một dãy các không gian C véc tơ

$$0 \longrightarrow \omega(M) \xrightarrow{f_\partial} \omega(N) \xrightarrow{g_\partial} \omega(P) \longrightarrow 0.$$

Về hàm tử thớ

Bây giờ ta sẽ kiểm tra tính khớp của hàm tử ω. Xét một dãy khớp ngắn các module vi phân

$$0 \longrightarrow M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} P \longrightarrow 0.$$

Bằng cách lấy không gian nghiệm của phương trình vi phân, ta có một dãy các không gian C véc tơ

$$0 \longrightarrow \omega(M) \xrightarrow{f_\partial} \omega(N) \xrightarrow{g_\partial} \omega(P) \longrightarrow 0.$$

Ta cần chứng minh dãy trên là khớp. Nhận xét rằng $\dim_C(\omega(N)) = \dim_C(\omega(M)) + \dim_C(\omega(P))$ và ngoài ra ảnh của $\omega(M)$ trong $\omega(P)$ là $\{0\}$ (vì dãy các module vi phân là khớp như Univ R-module). Ta cũng dễ thấy dãy các C- không gian véc tơ là khớp ở $\omega(M)$ vậy ta chỉ cần chứng minh dãy đó cũng khớp ở $\omega(N)$. Giả sử rằng có $x \in \omega(N)$ sao cho $g_\partial(x) = 0$ khi đó ta thấy rằng $x \in f_{\mathrm{Univ}\, R}(R \otimes_K M)$. Do đó $x \in f_\partial(\omega(M))$, nói cách khác dãy các C- không gian véc tơ là khớp ở $\omega(N)$.

Phạm trù $\mathcal{C}$ là Tanaka trung tính

Phạm trù $\mathcal{C}$ là Tanaka trung tính

Định lý

Phạm trù $\mathcal{C}$ là một phạm trù Tanaka trung tính. Hơn nữa phạm trù $\mathcal{C}$ là tương đương với phạm trù $\mathbf{Rep}_C \operatorname{Univ} G$ các biểu diễn hữu hạn của lược đồ nhóm affine $\operatorname{Univ} G$.

Phạm trù $\mathcal{C}$ là Tanaka trung tính

Định lý

Phạm trù $\mathcal{C}$ là một phạm trù Tanaka trung tính. Hơn nữa phạm trù $\mathcal{C}$ là tương đương với phạm trù $\mathbf{Rep}_C \operatorname{Univ} G$ các biểu diễn hữu hạn của lược đồ nhóm affine $\operatorname{Univ} G$.

Chứng minh

Phạm trù $\mathcal{C}$ là Tanaka trung tính

Định lý

Phạm trù $\mathcal{C}$ là một phạm trù Tanaka trung tính. Hơn nữa phạm trù $\mathcal{C}$ là tương đương với phạm trù $\mathbf{Rep}_C \operatorname{Univ} G$ các biểu diễn hữu hạn của lược đồ nhóm affine $\operatorname{Univ} G$.

Chứng minh Khẳng định đầu tiên đã được chứng minh. Khẳng định thứ hai là phức tạp, ta chỉ phác thảo những lập luận chính.

Phạm trù $\mathcal{C}$ là Tanaka trung tính

Định lý

Phạm trù $\mathcal{C}$ là một phạm trù Tanaka trung tính. Hơn nữa phạm trù $\mathcal{C}$ là tương đương với phạm trù $\mathbf{Rep}_C \operatorname{Univ} G$ *các biểu diễn hữu hạn của lược đồ nhóm affine* $\operatorname{Univ} G$*.*

Chứng minh Khẳng định đầu tiên đã được chứng minh. Khẳng định thứ hai là phức tạp, ta chỉ phác thảo những lập luận chính.

Xét C- không gian véc tơ $\omega(M)$. Vì $\operatorname{Univ} G$ tác động lên $\operatorname{Univ} R$ và tác động này có thể mở rộng thành một tác động vi phân lên $\operatorname{Univ} R \otimes_K M$ nên ta có một tác động cảm sinh ρ_M của $\operatorname{Univ} G$ lên không gian $\omega(M)$. Ngoài ra, tác động này của $\operatorname{Univ} G$ sẽ bị chẻ ra bởi đồng cấu nhóm $\operatorname{Univ} G \longrightarrow G_M$.

Phạm trù $\mathcal{C}$ là Tanaka trung tính

Định lý

Phạm trù $\mathcal{C}$ là một phạm trù Tanaka trung tính. Hơn nữa phạm trù $\mathcal{C}$ là tương đương với phạm trù $\mathbf{Rep}_C\,\mathrm{Univ}\,G$ *các biểu diễn hữu hạn của lược đồ nhóm affine* $\mathrm{Univ}\,G$.

Chứng minh Khẳng định đầu tiên đã được chứng minh. Khẳng định thứ hai là phức tạp, ta chỉ phác thảo những lập luận chính.

Xét C- không gian véc tơ $\omega(M)$. Vì $\mathrm{Univ}\,G$ tác động lên $\mathrm{Univ}\,R$ và tác động này có thể mở rộng thành một tác động vi phân lên $\mathrm{Univ}\,R \otimes_K M$ nên ta có một tác động cảm sinh ρ_M của $\mathrm{Univ}\,G$ lên không gian $\omega(M)$. Ngoài ra, tác động này của $\mathrm{Univ}\,G$ sẽ bị chẻ ra bởi đồng cấu nhóm $\mathrm{Univ}\,G \longrightarrow G_M$.

Cho T là một C-đại số. Ta có thể kiểm tra rằng phép xây dựng trên cũng đúng nếu ta thay module vi phân $\mathrm{Univ}\,R$ bởi $\mathrm{Univ}\,R \otimes_C T$. Nói cách khác ta có thể xem $(\omega(M), \rho_M)$ là một biểu diễn đại số của $\mathrm{Univ}\,G$.

Phạm trù $\mathcal{C}$ là Tanaka trung tính

Định lý

Phạm trù $\mathcal{C}$ là một phạm trù Tanaka trung tính. Hơn nữa phạm trù $\mathcal{C}$ là tương đương với phạm trù $\mathbf{Rep}_C \operatorname{Univ} G$ *các biểu diễn hữu hạn của lược đồ nhóm affine* $\operatorname{Univ} G$.

Chứng minh Khẳng định đầu tiên đã được chứng minh. Khẳng định thứ hai là phức tạp, ta chỉ phác thảo những lập luận chính.

Xét C- không gian véc tơ $\omega(M)$. Vì $\operatorname{Univ} G$ tác động lên $\operatorname{Univ} R$ và tác động này có thể mở rộng thành một tác động vi phân lên $\operatorname{Univ} R \otimes_K M$ nên ta có một tác động cảm sinh ρ_M của $\operatorname{Univ} G$ lên không gian $\omega(M)$. Ngoài ra, tác động này của $\operatorname{Univ} G$ sẽ bị chẻ ra bởi đồng cấu nhóm $\operatorname{Univ} G \longrightarrow G_M$.

Cho T là một C-đại số. Ta có thể kiểm tra rằng phép xây dựng trên cũng đúng nếu ta thay module vi phân $\operatorname{Univ} R$ bởi $\operatorname{Univ} R \otimes_C T$. Nói cách khác ta có thể xem $(\omega(M), \rho_M)$ là một biểu diễn đại số của $\operatorname{Univ} G$.

Phạm trù $\mathcal{C}$ là Tanaka trung tính

Phạm trù $\mathcal{C}$ là Tanaka trung tính

Cho trước một biểu diễn đại số hữu hạn chiều (V, ρ) của Univ G, ta sẽ tìm cách xây dựng một module vi phân N sao cho $(\omega(N), \rho_N) \simeq (V, \rho)$.

Phạm trù $\mathcal{C}$ là Tanaka trung tính

Cho trước một biểu diễn đại số hữu hạn chiều (V, ρ) của Univ G, ta sẽ tìm cách xây dựng một module vi phân N sao cho $(\omega(N), \rho_N) \simeq (V, \rho)$. Dựa vào lý thuyết Galois cho các phương trình vi phân, ta có thể giả sử $\overline{\rho(A)} = A_M$ và do đó biểu diễn ρ bị chẻ ra bởi cấu xạ nhóm đại số Univ $G \longrightarrow G_M$. Do đó ta có thể thay thế Univ G bởi G_M.

Phạm trù $\mathcal{C}$ là Tanaka trung tính

Cho trước một biểu diễn đại số hữu hạn chiều (V, ρ) của Univ G, ta sẽ tìm cách xây dựng một module vi phân N sao cho $(\omega(N), \rho_N) \simeq (V, \rho)$. Dựa vào lý thuyết Galois cho các phương trình vi phân, ta có thể giả sử $\overline{\rho(A)} = A_M$ và do đó biểu diễn ρ bị chẻ ra bởi cấu xạ nhóm đại số Univ $G \longrightarrow G_M$. Do đó ta có thể thay thế Univ G bởi G_M.

Ta thừa nhận rằng cách xây dựng $(\omega(T), \rho_T)$ là giao hoán đối với các phép toán đại số (lấy nhân, đối nhân, đối ngẫu, tổng trực tiếp và tích tensor). Vì phạm trù $\mathcal{C}$ chứa module vi phân M và cũng đóng với các phép toán đại số nên phạm trù $\mathcal{C}$ cũng sẽ chứa tất cả các module vi phân có dạng là module con của một thương của module vi phân $M_n^m := M \otimes \cdots \otimes M \otimes M^* \otimes \cdots \otimes M^*$.

Phạm trù $\mathcal{C}$ là Tanaka trung tính

Cho trước một biểu diễn đại số hữu hạn chiều (V, ρ) của Univ G, ta sẽ tìm cách xây dựng một module vi phân N sao cho $(\omega(N), \rho_N) \simeq (V, \rho)$. Dựa vào lý thuyết Galois cho các phương trình vi phân, ta có thể giả sử $\overline{\rho(A)} = A_M$ và do đó biểu diễn ρ bị chẻ ra bởi cấu xạ nhóm đại số Univ $G \longrightarrow G_M$. Do đó ta có thể thay thế Univ G bởi G_M.

Ta thừa nhận rằng cách xây dựng $(\omega(T), \rho_T)$ là giao hoán đối với các phép toán đại số (lấy nhân, đối nhân, đối ngẫu, tổng trực tiếp và tích tensor). Vì phạm trù $\mathcal{C}$ chứa module vi phân M và cũng đóng với các phép toán đại số nên phạm trù $\mathcal{C}$ cũng sẽ chứa tất cả các module vi phân có dạng là module con của một thương của module vi phân $M_n^m := M \otimes \cdots \otimes M \otimes M^* \otimes \cdots \otimes M^*$.

Phạm trù $\mathcal{C}$ là Tanaka trung tính

Phạm trù $\mathcal{C}$ là Tanaka trung tính

Xét biểu diễn $W := (\omega(M), \rho_M)$ của G_M, lưu ý rằng biểu diễn này là trung thành. Ta thừa nhận rằng nếu W là một biểu diễn hữu hạn chiều trung thành thì một biểu diễn hữu hạn chiều bất kỳ của nhóm đại số affine G_M là một biểu diễn con của một biểu diễn thương của $W_n^m := W \otimes \cdots \otimes W \otimes W^* \otimes \cdots \otimes W^*$.

Phạm trù $\mathcal{C}$ là Tanaka trung tính

Xét biểu diễn $W := (\omega(M), \rho_M)$ của G_M, lưu ý rằng biểu diễn này là trung thành. Ta thừa nhận rằng nếu W là một biểu diễn hữu hạn chiều trung thành thì một biểu diễn hữu hạn chiều bất kỳ của nhóm đại số affine G_M là một biểu diễn con của một biểu diễn thương của $W_n^m := W \otimes \cdots \otimes W \otimes W^* \otimes \cdots \otimes W^*$.

Như ta đã nói ở trên, phạm trù $\mathcal{C}$ và cách xây dựng $(\omega(T), \rho_T)$ là giao hoán đối với các phép toán đại số, do đó tồn tại một module vi phân N sao cho $(\omega(N), \rho_N) \simeq (V, \rho)$. Nói rõ hơn, bắt đầu từ W, chúng ta có thể xây dựng (V, ρ) sau một số lần hữu hạn áp dụng các toán tử đại số. Khi đó ta xây dựng module vi phân N bằng cách áp dụng lại dãy các toán tử đại số đó, bắt đầu từ module vi phân M.

Phương trình vi phân kỳ dị chính quy

Phương trình vi phân kỳ dị chính quy

Trong phần này, $K = \mathbb{C}((z))$ là trường các chuỗi Laurent hình thức trên $\mathbb{C}$, ngoài ra ta đặt $\mathcal{O}_K := \mathbb{C}[[z]]$. Nói riêng, ta có $\mathcal{O}_K / z\mathcal{O}_K = \mathbb{C}$. Phép vi phân mà ta quan tâm được định nghĩa như sau $\partial := z \cdot \dfrac{d}{dz}$.

Phương trình vi phân kỳ dị chính quy

Trong phần này, $K = \mathbb{C}((z))$ là trường các chuỗi Laurent hình thức trên $\mathbb{C}$, ngoài ra ta đặt $\mathcal{O}_K := \mathbb{C}[[z]]$. Nói riêng, ta có $\mathcal{O}_K / z\mathcal{O}_K = \mathbb{C}$. Phép vi phân mà ta quan tâm được định nghĩa như sau $\partial := z \cdot \dfrac{d}{dz}$.

Cho M là một module vi phân trên K, một mạng lưới N của M là một tập hợp con có dạng $N = \mathcal{O}_K e_1 + \cdots + \mathcal{O}_K e_m$ và $(e_1, \cdots, e_m)$ là một K-cơ sở của M.

Định nghĩa

Một module vi phân M được gọi là kỳ dị chính quy nếu M có chứa một mạng lưới ∂-bất biến. Một phương trình vi phân có dạng $\partial Y = AY$ với A là một ma trận $n \times n$ với hệ số trong K được gọi lỳ kỳ dị chính quy nếu module vi phân gắn với nó là kỳ dị chính quy.

Phương trình vi phân kỳ dị chính quy

Phương trình vi phân kỳ dị chính quy

Bổ đề

Nếu M_1 và M_2 là các module vi phân kỳ dị chính quy thì $M_1 \oplus M_2$, $M_1 \otimes M_2$ và M_1^* cũng là các module kỳ dị chính quy. Hơn nữa, các module vi phân con và module vi phân thương của một module kỳ dị chính quy thì cũng kỳ dị chính quy.

Phương trình vi phân kỳ dị chính quy

Bổ đề

Nếu M_1 và M_2 là các module vi phân kỳ dị chính quy thì $M_1 \oplus M_2$, $M_1 \otimes M_2$ và M_1^* cũng là các module kỳ dị chính quy. Hơn nữa, các module vi phân con và module vi phân thương của một module kỳ dị chính quy thì cũng kỳ dị chính quy.

Nhờ có bổ đề trên mà ta có tính chất sau

Mệnh đề

Phạm trù $\mathcal{C}$ các module vi phân kỳ dị chính quy là một phạm trù con đầy đủ của Diff_K *và đóng với các phép toán đại số. Do đó phạm trù $\mathcal{C}$ cũng là một phạm trù Tanaka trung tính.*

Phương trình vi phân kỳ dị chính quy

Bổ đề

Nếu M_1 và M_2 là các module vi phân kỳ dị chính quy thì $M_1 \oplus M_2$, $M_1 \otimes M_2$ và M_1^* cũng là các module kỳ dị chính quy. Hơn nữa, các module vi phân con và module vi phân thương của một module kỳ dị chính quy thì cũng kỳ dị chính quy.

Nhờ có bổ đề trên mà ta có tính chất sau

Mệnh đề

Phạm trù $\mathcal{C}$ các module vi phân kỳ dị chính quy là một phạm trù con đầy đủ của Diff_K *và đóng với các phép toán đại số. Do đó phạm trù $\mathcal{C}$ cũng là một phạm trù Tanaka trung tính.*

Nội dung chính của phần này là miêu tả cụ thể mở rộng Picard-Vessiot phổ quát của $\mathcal{C}$ đồng thời tìm hiểu thêm về lược đồ nhóm affine gắn với $\mathcal{C}$.

Phân loại phương trình vi phân kỳ dị chính quy

Phân loại phương trình vi phân kỳ dị chính quy

Cho M là một module vi phân kỳ dị chính quy có chiều n cùng với một mạng lưới ∂-bất biến N. Khi đó zN cũng bất biến bởi phép toán vi phân ∂. Như ta biết, không gian $\overline{N} := N/zN$ là một $\mathbb{C}$-không gian véc tơ có chiều n. Do đó phép toán vi phân ∂ cảm sinh một phép toán $\mathbb{C}$-tuyến tính $\overline{\partial}_N$ trên $\overline{N}$.

Phân loại phương trình vi phân kỳ dị chính quy

Cho M là một module vi phân kỳ dị chính quy có chiều n cùng với một mạng lưới ∂-bất biến N. Khi đó zN cũng bất biến bởi phép toán vi phân ∂. Như ta biết, không gian $\overline{N} := N/zN$ là một $\mathbb{C}$-không gian véc tơ có chiều n. Do đó phép toán vi phân ∂ cảm sinh một phép toán $\mathbb{C}$-tuyến tính $\overline{\partial}_N$ trên $\overline{N}$.

Bổ đề

(bổ đề 1)
Nếu M là một module kỳ dị chính quy thì tồn tại một module ∂-bất biến N sao cho các giá trị riêng $c_1, \cdots, c_m$ của phép biến đổi tuyến tính $\overline{\partial}_N$ trên $\overline{N}$ thỏa mãn tính chất : Nếu $c_i - c_j \in \mathbb{Z}$ thì $c_i = c_j$.

Phân loại phương trình vi phân kỳ dị chính quy

Phân loại phương trình vi phân kỳ dị chính quy

Chứng minh.

- Chọn một mạng lưới ∂-bất biến N bất kỳ của M và ký hiệu các giá trị riêng của $\overline{\partial}_N$ trên $\overline{N}$ bởi $t_1, \cdots, t_k$. Khi đó ta có một phân tích thành tổng các không gian con riêng tổng quát $\overline{N} = \overline{N}(t_1) \oplus \cdots \oplus \overline{N}(t_k)$.

Phân loại phương trình vi phân kỳ dị chính quy

Chứng minh.

- Chọn một mạng lưới ∂-bất biến N bất kỳ của M và ký hiệu các giá trị riêng của $\overline{\partial}_N$ trên $\overline{N}$ bởi $t_1, \cdots, t_k$. Khi đó ta có một phân tích thành tổng các không gian con riêng tổng quát $\overline{N} = \overline{N}(t_1) \oplus \cdots \oplus \overline{N}(t_k)$.
- Ta có thể chọn các phần tử $e_{i,j} \in \mathbb{N}$ với $1 \leq i \leq k$ và $1 \leq j \leq m_i$ sao cho $\{\overline{e}_{i,j} | 1 \leq j \leq m_i\}$ là một cơ sở của $\overline{N}(t_i)$. Khi đó $\{e_{i,j}\}$ là một cơ sở của $\mathcal{O}_K$-module N. Bây giờ ta xét một mạng lưới mới N_1 được sinh ra từ cơ sở $\{ze_{1,1}, \cdots, ze_{1,m_1}, e_{2,1}, \cdots, e_{k,m_k}\}$. Từ đẳng thức $\partial z = z$, dễ thấy rằng mạng lưới này cũng là ∂- bất biến. Hơn nữa, phép biến đổi tuyến tính $\overline{\partial}_{N_1}$ trên $\overline{N}_1$ nhận $\{t_1 + 1, t_2, \cdots, t_k\}$ là tập tất cả các giá trị riêng.

Phân loại phương trình vi phân kỳ dị chính quy

Chứng minh.

- Chọn một mạng lưới ∂-bất biến N bất kỳ của M và ký hiệu các giá trị riêng của $\overline{\partial}_N$ trên $\overline{N}$ bởi $t_1, \cdots, t_k$. Khi đó ta có một phân tích thành tổng các không gian con riêng tổng quát $\overline{N} = \overline{N}(t_1) \oplus \cdots \oplus \overline{N}(t_k)$.
- Ta có thể chọn các phần tử $e_{i,j} \in \mathbb{N}$ với $1 \leq i \leq k$ và $1 \leq j \leq m_i$ sao cho $\{\overline{e}_{i,j} | 1 \leq j \leq m_i\}$ là một cơ sở của $\overline{N}(t_i)$. Khi đó $\{e_{i,j}\}$ là một cơ sở của $\mathcal{O}_K$-module N. Bây giờ ta xét một mạng lưới mới N_1 được sinh ra từ cơ sở $\{ze_{1,1}, \cdots, ze_{1,m_1}, e_{2,1}, \cdots, e_{k,m_k}\}$. Từ đẳng thức $\partial z = z$, dễ thấy rằng mạng lưới này cũng là ∂- bất biến. Hơn nữa, phép biến đổi tuyến tính $\overline{\partial}_{N_1}$ trên $\overline{N}_1$ nhận $\{t_1 + 1, t_2, \cdots, t_k\}$ là tập tất cả các giá trị riêng.
- Do đó nếu có $t_i - t_j \in \mathbb{Z}$, ta có thể sử dụng thuật toán trên một số hữu hạn lần với t_i. Kết quả là sau một số hữu hạn lần áp dụng thuật toán trên, ta thu được một mạng lưới thỏa mãn điều kiện đặt ra

$\square$

Phân loại phương trình vi phân kỳ dị chính quy

Bổ đề

bổ đề 2
Cho $U, V \in M_n(\mathbb{C})$ và giả sử rằng chúng không có giá trị riêng nào chung. Khi đó ánh xạ được định nghĩa bởi $X \longmapsto UX - XV$ là một tự đẳng cấu của $M_n(\mathbb{C})$.

Phân loại phương trình vi phân kỳ dị chính quy

Phân loại phương trình vi phân kỳ dị chính quy

Mệnh đề

Một phương trình vi phân kỳ dị chính quy $\partial Y = AY$ luôn tương đương với một phương trình vi phân có dạng $\partial Y = A_0 Y$ với $A_0 \in M_n(\mathbb{C})$ và hiệu của hai giá trị riêng khác nhau bất kỳ của A_0 thì không phải là số nguyên.

Phân loại phương trình vi phân kỳ dị chính quy

Mệnh đề

Một phương trình vi phân kỳ dị chính quy $\partial Y = AY$ luôn tương đương với một phương trình vi phân có dạng $\partial Y = A_0 Y$ với $A_0 \in M_n(\mathbb{C})$ và hiệu của hai giá trị riêng khác nhau bất kỳ của A_0 thì không phải là số nguyên.

Chứng minh

Phân loại phương trình vi phân kỳ dị chính quy

Mệnh đề

Một phương trình vi phân kỳ dị chính quy $\partial Y = AY$ luôn tương đương với một phương trình vi phân có dạng $\partial Y = A_0 Y$ với $A_0 \in M_n(\mathbb{C})$ và hiệu của hai giá trị riêng khác nhau bất kỳ của A_0 thì không phải là số nguyên.

Chứng minh Gọi M là module vi phân kỳ dị chính quy cùng với mạng lưới ∂- bất biến N và ta có thể chọn $\mathcal{O}_K$-cơ sở của N. Ta có thể giả sử rằng phương trình vi phân của M tương ứng với cơ sở đó là $y' = Ay$. Ta có thể viết ma trận A dưới dạng sau

$$A = A_0 + A_1 z + \cdots, A_i \in M_n(\mathbb{C}).$$

Phân loại phương trình vi phân kỳ dị chính quy

Mệnh đề

Một phương trình vi phân kỳ dị chính quy $\partial Y = AY$ luôn tương đương với một phương trình vi phân có dạng $\partial Y = A_0 Y$ với $A_0 \in M_n(\mathbb{C})$ và hiệu của hai giá trị riêng khác nhau bất kỳ của A_0 thì không phải là số nguyên.

Chứng minh Gọi M là module vi phân kỳ dị chính quy cùng với mạng lưới ∂- bất biến N và ta có thể chọn $\mathcal{O}_K$-cơ sở của N. Ta có thể giả sử rằng phương trình vi phân của M tương ứng với cơ sở đó là $y' = Ay$. Ta có thể viết ma trận A dưới dạng sau

$$A = A_0 + A_1 z + \cdots, A_i \in M_n(\mathbb{C}).$$

Ta có thể kiểm tra rằng toán tử tuyến tính $\overline{\partial}_N$ tác động lên $\overline{N}$ được cho bởi ma trận A_0. Dựa vào bổ đề 1 về các giá trị riêng không đẳng nguyên, ta có thể giả sử rằng hiệu hai giá trị riêng khác nhau bất kỳ của A_0 đều không phải là số nguyên.

Phân loại phương trình vi phân kỳ dị chính quy

Phân loại phương trình vi phân kỳ dị chính quy

Ta sẽ xây dựng một ma trận $P = I + P_1 z + \cdots$, $P_i \in M_n(\mathbb{C})$ sao cho $PA_0 = AP - \partial P$. Và do đó hai phương trình $\partial Y = AY$ và $\partial Y = A_0 Y$ là tương đương nhau.

Phân loại phương trình vi phân kỳ dị chính quy

Ta sẽ xây dựng một ma trận $P = I + P_1 z + \cdots$, $P_i \in M_n(\mathbb{C})$ sao cho $PA_0 = AP - \partial P$. Và do đó hai phương trình $\partial Y = AY$ và $\partial Y = A_0 Y$ là tương đương nhau.

Bây giờ, muốn xây dựn P, ta so sánh các hệ số của z^t ở hai vế của đẳng thức. Ta thấy rằng

$$A_0 P_i - P_i(A_0 + iI) = -(A_i + A_{i-1} P_1 + \cdots + A_1 P_{i-1}).$$

Phân loại phương trình vi phân kỳ dị chính quy

Ta sẽ xây dựng một ma trận $P = I + P_1 z + \cdots, P_i \in M_n(\mathbb{C})$ sao cho $PA_0 = AP - \partial P$. Và do đó hai phương trình $\partial Y = AY$ và $\partial Y = A_0 Y$ là tương đương nhau.

Bây giờ, muốn xây dựn P, ta so sánh các hệ số của z^t ở hai vế của đẳng thức. Ta thấy rằng

$$A_0 P_i - P_i(A_0 + iI) = -(A_i + A_{i-1}P_1 + \cdots + A_1 P_{i-1}).$$

Dựa vào đặc điểm của các giá trị riêng của A_0, ta thấy rằng khi $i > 0$ thì hai ma trận A_0 và $A_0 + iI$ không có chung một giá giá trị riêng nào. Vì vậy, dựa vào bổ đề 2, ta có thể xây dựng bằng quy nạp các ma trận P_i. Nói tóm lại ta có thể xây dựng ma trận P với các tính chất mong muốn nêu trên, đây là điều cần phải chứng minh

Mở rộng Picard-Vessiot phổ quát của các phương trình vi phân kỳ dị chính quy

Mở rộng Picard-Vessiot phổ quát của các phương trình vi phân kỳ dị chính quy

Định lý

1. Mở rộng Picard-Vessiot phổ quát của phạm trù $\mathcal{C}$ các phương trình vi phân kỳ dị chính quy là K- đại số
Univ $R := K[\{z^a\}_{a\in\mathbb{C}}, \ell]/(\{z^{a+b} - z^a \cdot z^b\}_{a,b\in\mathbb{C}})$. *Toán tử vi phân được định nghĩa bởi* $\partial := z\dfrac{d}{dz}$ *và như thường lệ* $\dfrac{d}{dz}z^a = az^{a-1}$ *và* $\dfrac{d}{dz}\ell = z^{-1}$.

Mở rộng Picard-Vessiot phổ quát của các phương trình vi phân kỳ dị chính quy

Định lý

1. Mở rộng Picard-Vessiot phổ quát của phạm trù $\mathcal{C}$ các phương trình vi phân kỳ dị chính quy là K- đại số Univ $R := K[\{z^a\}_{a\in\mathbb{C}}, \ell]/(\{z^{a+b} - z^a \cdot z^b\}_{a,b\in\mathbb{C}})$. *Toán tử vi phân được định nghĩa bởi* $\partial := z\dfrac{d}{dz}$ *và như thường lệ* $\dfrac{d}{dz}z^a = az^{a-1}$ *và* $\dfrac{d}{dz}\ell = z^{-1}$.

2. Nhóm Galois vi phân phổ quát Univ $G = \mathrm{Spec}(B)$, *ở đây B là một đại số Hopf được cho bởi:*

- $B = \mathbb{C}[\{s(a)\}_{a\in\mathbb{C}}, t]$ *và ở đây hệ thức liên hệ duy nhất giữa các phần tử sinh là* $s(a+b) = s(a)\cdot s(b)$ *với mọi* $a, b \in \mathbb{C}$ *và* $s(n) = 1$ *với mọi* $n \in \mathbb{Z}$.
- *Phép đối nhân* Δ *trên B được cho bởi công thức* $\Delta(s(a)) = s(a)\otimes s(a)$ *và* $\Delta(t) = (t\otimes 1) + (1\otimes t)$.

Mở rộng Picard-Vessiot phổ quát của các phương trình vi phân kỳ dị chính quy

Mở rộng Picard-Vessiot phổ quát của các phương trình vi phân kỳ dị chính quy

Chứng minh

Mở rộng Picard-Vessiot phổ quát của các phương trình vi phân kỳ dị chính quy

Chứng minh Nhờ vào dạng chuẩn tắc Jordan của một ma trận với hệ số trong $\mathbb{C}$, ta thấy rằng việc giải các phương trình vi phân kỳ dị chính quy có thể quy về việc giải các phương trình vi phân có dạng $\partial Y = AY$ với A là một ma trận với hệ số trong $\mathbb{C}$ mà đa thức đặc trưng của nó có dạng $(x-c)^m$ $(c \in \mathbb{C})$.

Mở rộng Picard-Vessiot phổ quát của các phương trình vi phân kỳ dị chính quy

Chứng minh Nhờ vào dạng chuẩn tắc Jordan của một ma trận với hệ số trong $\mathbb{C}$, ta thấy rằng việc giải các phương trình vi phân kỳ dị chính quy có thể quy về việc giải các phương trình vi phân có dạng $\partial Y = AY$ với A là một ma trận với hệ số trong $\mathbb{C}$ mà đa thức đặc trưng của nó có dạng $(x-c)^m$ $(c \in \mathbb{C})$.

Xét một module vi phân M cùng một K-cơ sở $(e_1, \cdots, e_n)$ sao cho phương trình vi phân ứng với M theo cơ sở đó có dạng $\partial Y = AY$, ở đây

$$A = \begin{pmatrix} c & 0 & & & \\ 1 & c & & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & c & 0 \\ & & & 1 & c \end{pmatrix}$$

là một khối Jordan ứng với giá trị riêng c.

Mở rộng Picard-Vessiot phổ quát của các phương trình vi phân kỳ dị chính quy

Chứng minh Nhờ vào dạng chuẩn tắc Jordan của một ma trận với hệ số trong $\mathbb{C}$, ta thấy rằng việc giải các phương trình vi phân kỳ dị chính quy có thể quy về việc giải các phương trình vi phân có dạng $\partial Y = AY$ với A là một ma trận với hệ số trong $\mathbb{C}$ mà đa thức đặc trưng của nó có dạng $(x-c)^m$ $(c \in \mathbb{C})$.

Xét một module vi phân M cùng một K-cơ sở $(e_1, \cdots, e_n)$ sao cho phương trình vi phân ứng với M theo cơ sở đó có dạng $\partial Y = AY$, ở đây

$$A = \begin{pmatrix} c & 0 & & & \\ 1 & c & & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & c & 0 \\ & & & 1 & c \end{pmatrix}$$

là một khối Jordan ứng với giá trị riêng c.

Ta có thể thấy không gian nghiệm của phương trình vi phân trên trong Univ $R \otimes_K M$ có chiều là n. Thật vậy, một $\mathbb{C}$ - cơ sở của nó được cho bởi $\{z^c e_n\} \cup \{z^c e_i + \ell z^c e_{i+1} + \frac{1}{2}\ell^2 z^c e_{i+2} + \cdots + \frac{1}{(n-i)!}\ell^{n-i} z^c e_n | i = 1, \cdots, n-1\}$. Do đó dựa vào mệnh đề về sự phân loại, ta có thể thấy Univ R thỏa mãn tính chất 1,3,4 của định nghĩa mở rộng Picard-Vessiot phổ quát.

Ta có thể thấy không gian nghiệm của phương trình vi phân trên trong Univ $R \otimes_K M$ có chiều là n. Thật vậy, một $\mathbb{C}$ - cơ sở của nó được cho bởi $\{z^c e_n\} \cup \{z^c e_i + \ell z^c e_{i+1} + \frac{1}{2}\ell^2 z^c e_{i+2} + \cdots + \frac{1}{(n-i)!}\ell^{n-i} z^c e_n | i = 1, \cdots, n-1\}$. Do đó dựa vào mệnh đề về sự phân loại, ta có thể thấy Univ R thỏa mãn tính chất 1,3,4 của định nghĩa mở rộng Picard-Vessiot phổ quát. Ta cũng có thể chứng minh tính chất 2 nhưng nói chung lập luận này chỉ thuần túy đại số.

2. Trong phần này, chúng ta phải xem xét một $\mathbb{C}$-đại số H và tính nhóm $\mathcal{F}(H)$ các $H \otimes_{\mathbb{C}} K$- tự đẳng cấu σ của $H \otimes_{\mathbb{C}} \mathrm{Univ}\, R$ sao cho σ giao hoán với phép toán vi phân trên $H \otimes_{\mathbb{C}} \mathrm{Univ}\, R$.

2. Trong phần này, chúng ta phải xem xét một $\mathbb{C}$-đại số H và tính nhóm $\mathcal{F}(H)$ các $H \otimes_{\mathbb{C}} K$- tự đẳng cấu σ của $H \otimes_{\mathbb{C}} \text{Univ}\, R$ sao cho σ giao hoán với phép toán vi phân trên $H \otimes_{\mathbb{C}} \text{Univ}\, R$.

Dễ thấy rằng σ được xác định bởi $\sigma(\ell)$ và $\{\sigma(z^a)|a \in \mathbb{C}\}$. Vì z^a là khả nghịch nên ta có thể viết $\sigma(z^a) = h(a)z^a$ với $h(a) \in H \otimes_{\mathbb{C}} \text{Univ}\, R^*$. Bằng cách sử dụng hệ thức $\partial \circ \sigma = \sigma \circ \partial$, ta thấy rằng $\partial(h(a)) = 0$, do đó $h(a) \in H^*$.

2. Trong phần này, chúng ta phải xem xét một $\mathbb{C}$-đại số H và tính nhóm $\mathcal{F}(H)$ các $H \otimes_{\mathbb{C}} K$- tự đẳng cấu σ của $H \otimes_{\mathbb{C}} \operatorname{Univ} R$ sao cho σ giao hoán với phép toán vi phân trên $H \otimes_{\mathbb{C}} \operatorname{Univ} R$.

Dễ thấy rằng σ được xác định bởi $\sigma(\ell)$ và $\{\sigma(z^a) | a \in \mathbb{C}\}$. Vì z^a là khả nghịch nên ta có thể viết $\sigma(z^a) = h(a) z^a$ với $h(a) \in H \otimes_{\mathbb{C}} \operatorname{Univ} R^*$. Bằng cách sử dụng hệ thức $\partial \circ \sigma = \sigma \circ \partial$, ta thấy rằng $\partial(h(a)) = 0$, do đó $h(a) \in H^*$. Ngoài ra vì $z^{a+b} = z^a \cdot z^b$ nên ta thấy rằng $h(a+b) = h(a) + h(b)$. Đồng thời $h(1) = 1$ vì σ là $H \otimes_{\mathbb{C}} K$-tuyến tính. Vậy ta suy ra được h là một đồng cấu nhóm $h : \mathbb{C}/\mathbb{Z} \longrightarrow H^*$.

2. Trong phần này, chúng ta phải xem xét một $\mathbb{C}$-đại số H và tính nhóm $\mathcal{F}(H)$ các $H \otimes_{\mathbb{C}} K$- tự đẳng cấu σ của $H \otimes_{\mathbb{C}} \mathrm{Univ}\, R$ sao cho σ giao hoán với phép toán vi phân trên $H \otimes_{\mathbb{C}} \mathrm{Univ}\, R$.

Dễ thấy rằng σ được xác định bởi $\sigma(\ell)$ và $\{\sigma(z^a) | a \in \mathbb{C}\}$. Vì z^a là khả nghịch nên ta có thể viết $\sigma(z^a) = h(a)z^a$ với $h(a) \in H \otimes_{\mathbb{C}} \mathrm{Univ}\, R^*$. Bằng cách sử dụng hệ thức $\partial \circ \sigma = \sigma \circ \partial$, ta thấy rằng $\partial(h(a)) = 0$, do đó $h(a) \in H^*$. Ngoài ra vì $z^{a+b} = z^a \cdot z^b$ nên ta thấy rằng $h(a + b) = h(a) + h(b)$. Đồng thời $h(1) = 1$ vì σ là $H \otimes_{\mathbb{C}} K$-tuyến tính. Vậy ta suy ra được h là một đồng cấu nhóm $h : \mathbb{C}/\mathbb{Z} \longrightarrow H^*$. Tương tự như trên ta cũng thấy rằng $\sigma(\ell) = \ell + c$ với $c \in H$. Vậy σ cho ta một phần tử của $\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(B, H)$.

2. Trong phần này, chúng ta phải xem xét một $\mathbb{C}$-đại số H và tính nhóm $\mathcal{F}(H)$ các $H \otimes_{\mathbb{C}} K$- tự đẳng cấu σ của $H \otimes_{\mathbb{C}} \mathrm{Univ}\, R$ sao cho σ giao hoán với phép toán vi phân trên $H \otimes_{\mathbb{C}} \mathrm{Univ}\, R$.

Dễ thấy rằng σ được xác định bởi $\sigma(\ell)$ và $\{\sigma(z^a) | a \in \mathbb{C}\}$. Vì z^a là khả nghịch nên ta có thể viết $\sigma(z^a) = h(a) z^a$ với $h(a) \in H \otimes_{\mathbb{C}} \mathrm{Univ}\, R^*$. Bằng cách sử dụng hệ thức $\partial \circ \sigma = \sigma \circ \partial$, ta thấy rằng $\partial(h(a)) = 0$, do đó $h(a) \in H^*$. Ngoài ra vì $z^{a+b} = z^a \cdot z^b$ nên ta thấy rằng $h(a+b) = h(a) + h(b)$. Đồng thời $h(1) = 1$ vì σ là $H \otimes_{\mathbb{C}} K$-tuyến tính. Vậy ta suy ra được h là một đồng cấu nhóm $h : \mathbb{C}/\mathbb{Z} \longrightarrow H^*$. Tương tự như trên ta cũng thấy rằng $\sigma(\ell) = \ell + c$ với $c \in H$. Vậy σ cho ta một phần tử của $\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(B, H)$.

Ngược lại, một phần tử của $\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(B, H)$ giúp ta xác định được duy nhất một $\sigma \in \mathcal{F}$. Do đó, $\mathcal{F}(A) = \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(B, H)$ hay nói cách khác, lược đồ nhóm affine $\mathrm{Univ}\, G$ được cho bởi B. Từ cách mô tả cụ thể $\mathcal{F}$, ta thấy rằng Δ được miêu tả như trong khẳng định của định lý.

Cảm ơn mọi người vì đã lắng nghe.